

BENADERINGSPROBLEMEN BIJ IRRATIONALE GETALLEN

REDE

UITGESPROKEN BIJ DE AANVAARDING
VAN HET AMBT VAN HOOGLEERAAR
IN DE WISKUNDE AAN DE VRIJE
UNIVERSITEIT TE AMSTERDAM
OP VRIJDAG 10 OCTOBER 1930

DOOR

Dr. J. F. KOKSMA



BENADERINGSPROBLEMEN BIJ IRRATIONALE GETALLEN

REDE

UITGESPROKEN BIJ DE AANVAARDING
VAN HET AMBT VAN HOOGLEERAAR
IN DE WISKUNDE AAN DE VRIJE
UNIVERSITEIT TE AMSTERDAM
OP VRIJDAG 10 OCTOBER 1930

DOOR

Dr. J. F. KOKSMA



*Hoogeerzame Heeren Directeuren der Vereeniging
voor Hooger Onderwijs op Gereformeerden Grond-
slag, Edelgrootachtbare Heeren Curatoren der Vrije
Universiteit, Hooggeleerde Heeren Professoren,
Dames en Heeren Studenten en voorts Gij allen, die
deze plechtigheid met Uw tegenwoordigheid vereert,*

Zeer gewaardeerde Toehoorders!

Onder hare problemen telt de wiskunde sommige, die, bijna even oud als deze wetenschap zelve, haar op haren ontwikkelingsgang steeds begeleid hebben en heden ten dage nog niets van hunne actualiteit hebben verloren.

Een sprekend voorbeeld hiervan vinden wij in de vraag naar de natuur der irrationale getallen.

Van Pythagoras af, die vijf eeuwen voor het begin onzer jaartelling stuitte op de irrationaliteit $\sqrt{2}$, toen hij bemerkte, dat diagonaal en zijde van een vierkant onderling onmeetbaar zijn, tot in de moderne getallenleer heeft deze vraag in de verschillende vormen, waarin ze zich voordeed, een groote aantrekkingskracht gehad op de beoefenaren der Wiskunde. Hieronder rekenen we in de eerste plaats wiskundigen als Archimedes, die voor het eerst π nauwkeurig benaderde, Euclides, die door de theorie der evenredigheden het irrationaliteitsbegrip streng mathematisch behandelde, Lambert, die in 1766 voor het eerst bewees, dat de getallen e en π irrationaal zijn, onze landgenooten Metius, Snellius en Huygens, die achtereenvolgens steeds betere benaderingsmethoden voor π vonden en vele anderen, waarvan enkele in het vervolg dezer rede nog ter sprake zullen komen.

Naast deze groote wiskundigen dienen we echter ook te noemen de vaak vernuftige phantasten, die meest met elementaire hulpmiddelen den sleutel tot deze raadselen tracht-

ten te vinden; tot hen kwam het probleem in den bekenden vorm van kubusverdubbeling, cirkelquadratuur en dergelijke vraagstukken, die, hoewel thans volledig opgelost, ook nu nog een groote populariteit genieten, een populariteit, die verklaard kan worden uit het feit, dat voor de formuleering dezer opgaven slechts zeer weinig mathematisch inzicht vereischt wordt. Toch zijn deze vragen veel moeilijker, dan ze oppervlakkig schijnen. Immers, zoo berust de vraag om met passer en liniaal de ribbe te construeeren van een kubus, die tweemaal zoo grooten inhoud heeft als een gegeven kubus, een probleem, waarvan o.a. Hippocrates en Plato de oplossing zochten, op de vraag naar de construeerbaarheid van het getal $\sqrt[3]{2}$ met passer en liniaal, terwijl de vraag om met passer en liniaal een vierkant te construeeren van gelijke oppervlakte als een gegeven cirkel, in haar wezen dezelfde is als die naar het algebraïsch karakter van het irrationale getal π .

Reeds vroeg trachtte men irrationale getallen bij benadering voor te stellen door rationale: ik noemde U reeds eenige mathematici, die dergelijke benaderingen uitvoerden voor het getal π . Van dit getal $\pi = 3,1415\dots$ zijn thans ruim 700 decimalen bekend. Ook voor andere irrationale getallen kan men zulke approximaties uitvoeren. Ieder weet, hoe men door formeele worteltrekking uit 2 een rij decimalen achter de komma krijgt, die nooit afbreekt. Houdt men na een bepaald cijfer op, dan heeft men een rationale benadering van $\sqrt{2}$, die scherper is naarmate men meer cijfers heeft berekend, doch die iets te klein is. Verhoogt men het laatste cijfer met 1, dan is het benaderend rationaal getal iets te groot. Men kan dus $\sqrt{2}$ insluiten tusschen twee rationale getallen zoo dicht als men maar wil.

Practisch zijn dergelijke benaderingen op zeer verschillende manieren uit te voeren: ik noem U slechts de methoden der oneindige sommen en producten en die der kettingbreuken, welke ook in den jongsten tijd in allerlei onderzoekingen een groote rol spelen.

Hoezeer deze onderwerpen ons lokken naar de numerieke

rekenkunde, wij zullen dat gebied niet betreden: ik zal U niet lastig vallen met recepten voor het samenstellen van logarithmentafels, doch U eenige beschouwingen geven over de theoretische zijde van het onderwerp „Benaderingsproblemen bij irrationale getallen”.

Het is mijn doel daarbij Uw aandacht te richten naar enkele terreinen der moderne getallenleer.

Wanneer men U opdraagt een irrationaal getal a , dat wij positief zullen onderstellen, *zeer* dicht te benaderen met een rationaal getal $\frac{x}{y}$, waarin x en y natuurlijke getallen voorstellen, zal deze opgave scherper zijn uit te voeren, naarmate ge den noemer y grooter moogt kiezen. Men noemt $\frac{x}{y}$ een goede benadering, wanneer men geen breuk kan vinden, die dichter bij het irrationale getal a ligt, zonder in een grooteren noemer dan y te vervallen. De vraag rijst nu, hoe goed steeds een willekeurig getal a minstens is te benaderen. Men kan een antwoord op deze vraag vinden met behulp der zoogenaamde „ladenmethode”, een principe, dat overal in deze theorieën een groote rol speelt en neerkomt op de eenvoudige overweging, dat, als men $n + 1$ voorwerpen verdeelt over n laatjes, er minstens één la is aan te wijzen, die meer dan één voorwerp bevat.

Men vindt het volgende resultaat: ieder getal a kan op oneindig veel manieren bij benadering voorgesteld worden door een breuk $\frac{x}{y}$, en wel zoo scherp, dat het verschil tusschen dat getal a en de breuk kleiner is dan $\frac{1}{y^2}$.

Door Hurwitz is het analoge resultaat bewezen, dat bij ieder irrationaal getal a oneindig veel onvereenvoudigbare breuken $\frac{x}{y}$ zijn te vinden, die minder van a verschillen dan het bedrag $\frac{1}{\sqrt{5} y^2}$. Daar $\sqrt{5} > 1$ is, is deze benadering scher-

per dan de vorige. We merken echter op, dat we in deze stellingen den noemer y niet willekeurig mogen kiezen. Er wordt alleen uitgesproken, dat er oneindig veel noemers bestaan, waarbij een breuk $\frac{x}{y}$ behoort, die de scherpe benadering van a geeft, welke in de stelling van Hurwitz is uitgedrukt.

Borel breidde de stelling van Hurwitz uit, door aan te toonen, dat, mits $m > 10$ is, er tusschen elk paar getallen m en $15m^2$ ten minste één zulk een noemer y gelegen is.

Denjoy verscherpte het resultaat van Borel door de kleinste (van m afhankelijke) waarde aan te geven, waardoor men de uitdrukking $15m^2$ in de stelling van Borel kan vervangen.

Tenslotte gaf van der Corput aan, waardoor men de door Denjoy berekende waarde dient te vervangen, als men in de breuk $\frac{1}{\sqrt{5}y^2}$, die de scherpte der benadering aangeeft, $\sqrt{5}$ vervangt door een kleiner positief getal.

Hurwitz zelf bewees reeds, dat het onmogelijk is in zijn stelling de in de breuk $\frac{1}{\sqrt{5}y^2}$ optredende coëfficiënt $\sqrt{5}$ en exponent 2 door grootere getallen te vervangen.

We merken van de stelling van Hurwitz, die dus uitsprekt, hoe scherp a door oneindig veel rationale getallen $\frac{x}{y}$ op zijn minst te benaderen is, ten slotte nog op, dat ze afgeleid is en geldt in de algemeene veronderstelling, dat *a ieder willekeurig irrationaal getal* kan voorstellen.

Wij vragen ons nu af, hoe scherp een irrationaal getal a dan wel op zijn hoogst kan worden benaderd door oneindig veel breuken $\frac{x}{y}$. Het antwoord op deze vraag kost den wiskundigen veel moeite.

Om U te kunnen mededeelen wat op dit gebied is bereikt, zal het noodig zijn de irrationale getallen te onderscheiden.

Het getal $\sqrt{2}$ is een wortel der vierkantsvergelijking $x^2 - 2 = 0$. We noemen het daarom een algebraïsch getal.

In het algemeen: een reëel getal heet algebraïsch, wanneer het de wortel is eener algebraïsche vergelijking met geheele coëfficiënten. Den kleinsten graad, dien die vergelijking kan bezitten, noemen we den graad van het getal a ; men onderscheidt dus algebraïsche getallen van den 1en, 2en, 3en, algemeen n den graad; alle rationale getallen zijn van den 1en graad.

Met de vraag naar een zuiver rekenkundig kenmerk, waarmee men den graad van een getal kan herkennen, hielden zich vele wiskundigen, o.a. Lagrange, Liouville en Jacobi bezig; wij stippen alleen aan, dat voor de quadratische algebraïsche getallen de periodieke kettingbreuken een dergelijk kenmerk vormen.

Het was Liouville, die zich ook bezig hield met ons benaderingsprobleem. Hij vond op zeer eenvoudige wijze, dat bij ieder algebraïsch getal a van den tweeden graad een positieve constante c kan worden gevonden, waarvoor het volgende geldt: er bestaat slechts een eindig aantal breuken $\frac{x}{y}$, welke minder van a verschillen dan de waarde $\frac{c}{y^2}$.

Vergelijken we dit met het zooeven besproken resultaat van Hurwitz, dan begrijpen we, dat verscherping van Liouville's resultaat alleen gelegen kan zijn in nadere bepaling van c : de exponent 2 kan in de breuk $\frac{1}{\sqrt{5} y^2}$ van

Hurwitz niet door een grooteren en in de breuk $\frac{c}{y^2}$ van Liouville niet door een kleineren worden vervangen. De waarde 2 van dien exponent is dus voor de quadratische irrationale getallen de kritieke waarde.

Liouville strekte echter zijn onderzoek ook uit tot de algebraïsche getallen van hooger graad. Zijn resultaten zijn later verscherpt door Thue, terwijl diens stellingen eenige jaren geleden werden verbeterd door Siegel. Het blijkt nu, dat voor algebraïsche getallen van hooger graad dan 2 nog niet kan worden uitgemaakt, welke de kritieke waarde van den besproken exponent is.

Uit de stelling van Hurwitz volgt, dat deze waarde minstens 2 is, terwijl het resultaat van Siegel leert, dat ze voor een algebraïsch getal van den graad $n \geq 3$, zeker iets kleiner is dan het bedrag $2\sqrt{n}$.

Met behulp van de besproken approximaties van Thue-Siegel is het mogelijk geweest een probleem op te lossen, dat oogenscheinlijk met irrationale getallen niets uitstaande heeft.

Thue heeft n.l. de volgende stelling kunnen bewijzen: Wanneer men de termen van een irreducibel polynoom in x , van den graad $n \geq 3$ en met geheele coëfficiënten, aanvult met factoren y , zoodanig dat een homogene veelterm in x en y wordt verkregen van den graad n , dan heeft de vergelijking, die ontstaat door dezen laatsten veelterm gelijk te stellen aan een willekeurig geheel getal, slechts een eindig aantal oplossingen in geheele x en y . Meetkundig beteekent dit, dat op de kromme door deze vergelijking voorgesteld, slechts een eindig aantal roosterpunten kan liggen.

Keeren we echter tot de irrationale getallen terug.

Wij merkten in het begin dezer voordracht op, dat Pythagoras het getal $\sqrt{2}$ kende en het, zooals vanzelf spreekt, wist te construeeren als hypothenusa van een gelijkbeenigen rechthoekigen driehoek met de eenheid als rechthoekszijde. Ook bespraken wij reeds, hoe de Grieken andere irrationa-liteiten, al of niet als zoodanig herkend, trachtten met passer en liniaal te construeeren: $\sqrt[3]{2}$ en π .

Daar wij uit de meetkunde weten hoe elke constructie met passer en liniaal neerkomt op snijding van cirkels en rechte lijnen, wat analytisch wil zeggen: onderlinge oplossing van tweedegraads- en lineaire vergelijkingen, is het voor hen die algebra kennen duidelijk, dat slechts zeer speciale algebraïsche getallen als lengten van lijnen met passer en liniaal zijn te construeeren.

Zoo is het getal $\sqrt[3]{2}$, hoewel algebraïsch, niet met passer en liniaal te construeeren. Met deze kennis heeft voor ons het probleem der kubusverdubbeling met passer en liniaal afgedaan.

Zoo eenvoudig is het niet voor de cirkelquadratuur. Lambert had in 1766 de irrationaliteit van het getal π en van het getal e , de basis van het stelsel der natuurlijke logaritmen, bewezen. De vraag is nu: bezitten deze getallen het speciaal algebraïsch karakter, noodig voor hun constructie met passer en liniaal, of zijn ze misschien in 't geheel niet algebraïsch?

Deze vraag werd brandend toen Liouville in 1850 met behulp van reeksen aantoonde, dat er inderdaad getallen bestaan, die niet algebraïsch zijn; men noemt deze transcendent. Het gelukte in 1873 Hermite te Parijs, aan te toonen, dat het getal e , de basis van het stelsel der natuurlijke logaritmen, transcendent is en het oeroude probleem der cirkelquadratuur werd in 1882 opgelost, toen de Duitsche hoogleeraar Lindemann, voortbouwend op het geniale werk van Hermite aantoonde, dat ook π een transcendent getal is. Hiermede was zelfs bewezen, dat iedere constructie van π , die op algebraïsche operaties berust, onmogelijk is.

Wij vragen ons nu af, hoe scherp deze getallen e en π ten hoogste met een rationaal getal $\frac{x}{y}$ te benaderen zijn. Deze vraag is in 1928 door J. Popken te Groningen beantwoord. Uit Popken's publicaties blijkt, dat de kritieke waarde van den exponent, in het zooeven door ons besproken benaderingsprobleem, bij het getal e de waarde 2 bezit. Wat voor algebraïsche getallen van den graad $n \geq 3$ nog niet is opgelost, is dus bekend van het transcendente getal e . Popken's resultaat voor het getal π is veel minder scherp: dit ligt in den aard van het bewijs van Lindemann, waaraan Popken zijn gedachtengang ontleende.

Ook voor andere transcendente getallen is onderzocht, hoe goed ze ten hoogste door een rationaal getal $\frac{x}{y}$ zijn te benaderen. Zoo vond Mordoukhay-Boltowskoy voor de logarithme van een willekeurig positief algebraïsch getal $\neq 1$ een resultaat, in scherpte overeenkomend met dat van Popken voor het getal π .

Voor we tot andere problemen overgaan, vermeld ik nog, dat uit een door A. Khintchine in 1924 gevonden stelling volgt, dat voor bijna alle getallen de kritieke waarde van den besproken exponent gelijk aan 2 is. Hierin is „bijna alle” op te vatten in den zin van Borel.

De onderzoeken van Popken, waarheen we nog eens terugkeeren, dragen een algemeener karakter dan zou kunnen blijken uit het voorgaande. De grondgedachte is de volgende: Als a een willekeurig algebraïsch getal voorstelt, zullen wegens hunne transcendentie de getallen e en π beide ongelijk aan a zijn. Popken leidt nu af, hoe groot het verschil tusschen e en a en tusschen π en a elk minstens is. Hij leidt een positieve onderste grens voor deze verschillen af, die slechts afhangt van den graad en de coëfficiënten der algebraïsche vergelijking, waaraan a voldoet. Deze resultaten drukken dus uit, hoezeer (om een, op een andere stelling toegepaste, uitdrukking van Siegel te gebruiken) de getallen e en π „sich dagegen sträuben, algebraïsch zu sein.” Tevens leidt Popken een stelling af, waarin wordt uitgedrukt, hoe goed het getal e minstens door een algebraïsch getal is te benaderen, daarmee tegelijkertijd aantoonend, dat zijn resultaten voor het getal e zeer scherp zijn.

Voor π kon hij alleen aangeven, welke benadering ten hoogste mogelijk is. Dit resultaat is voor de cirkelquadratuur daarom van belang, omdat het voor iedere benaderingsconstructie van het getal π , die op algebraïsche operaties berust, een schatting aan de hand doet van de fout, die minstens gemaakt is.

Het zou me te ver voeren deze resultaten in de finesses te bespreken; liever wijs ik U op eenige merkwaardige benaderingen, die met deze een sterke analogie vertoonen. Ik merk daartoe op, dat Lindemann's onderzoeken (later gecompleteerd door Weierstrasz) niet alleen het transcendentiebewijs van π ten gevolge hadden, doch ook aantoonde, dat iedere macht van e met algebraïschen exponent $\neq 0$, benevens de natuurlijke logaritmie van ieder positief alge-

braïsch getal $\neq 1$, transcendent zijn. Wegens de eenvoudige eigenschappen van machten volgen al deze feiten uit de volgende stelling van Lindemann:

Iedere lineaire combinatie van machten met grondtal e en met algebraïsche exponenten en coëfficiënten is steeds ongelijk aan nul.

Verondersteld wordt hierbij natuurlijk, dat niet alle exponenten en niet alle coëfficiënten gelijk aan nul zijn.

De vraag, of de stelling van Lindemann ook voor andere functies $f(x)$ dan de exponentiaalfunctie geldt, is in het algemeen zeer moeilijk te beantwoorden. Hierbij komt bovendien nog, dat deze stelling, indien ze al voor $f(x)$ is aangetoond, ons over de transcendentie van $f(x)$ nog niets leert, wanneer $f(x)$ niet de eenvoudige eigenschappen van machten bezit, die het probleem voor de exponentiaalfunctie betrekkelijk eenvoudig maken. Hier liggen dus twee moeilijkheden. In den loop van dit jaar is een publicatie verschenen van den U reeds eerder genoemden Duitschen mathematicus C. F. Siegel, die o.a. een aantal zeer belangrijke resultaten bevat over de transcendentie van sommige functies $f(x)$, waarbij beide moeilijkheden zijn overwonnen.

Met behulp van een reeks, die een uitbreiding is van de bekende reeks, waarin de exponentiaalfunctie kan worden ontwikkeld, definieert Siegel de door hem zoo genoemde E -functies.

De eigenschappen dezer E -functies zijn, zooals Siegel aantoonst, invariant ten opzichte van bepaalde operaties; de E -functies vormen een ring. Speciaal geldt, dat de afgeleide en de integraal van een E -functie, alsmede de som en het product van twee E -functies weer E -functies zijn. De auteur bewijst, dat o.a. iedere veelterm in x met algebraïsche coëfficiënten, de exponentiaalfunctie en de nulde Besselsche functie $J_0(x)$ zulke E -functies zijn.

Met behulp van de eigenschappen dezer E -functies gelukt het nu Siegel een analogon van de stelling van Lindemann onder meer voor de nulde Besselsche functie aan te toonen.

Hieruit volgt dan dadelijk de transcendentie van $J_0(x)$ voor iedere algebraïsche $x \neq 0$.

Essentiëel nu in de verhandeling van Siegel is de positieve wending, die het transcendentiebewijs krijgt; het bewijs, dat de in de stelling van Lindemann optredende lineaire combinatie ongelijk aan nul is, wordt n.l. uitgevoerd doordat voor de absolute waarde dier lineaire combinatie een positieve ondergrens bepaald wordt. Voor het speciale geval van de exponentiaalfunctie zijn dergelijke onderzoeken door Popken verricht; Siegel's theorieën zijn echter algemeener. Hij deelt nieuwe methoden mede en geeft tal van nieuwe resultaten over de transcendentie van zekere functies en van verschillende kettingbreuken en getallen. Zoo kan hij aantonen, dat in de rij der getallen

$$\frac{\log 2}{\log 3}, \frac{\log 3}{\log 4}, \dots$$

willekeurig hooge irrationaliteiten voorkomen, terwijl men sinds Lindemann slechts wist, dat deze getallen irrationaal zijn.

Fundamenteel voor Siegel's onderzoeken zijn de methoden, die hij aangeeft om voor de absolute waarde eener lineaire combinatie van een aantal irrationale grootheden een positieve benedengrens aan te geven. In de laatste helft zijner verhandeling past hij de gevonden benaderingsmethoden toe bij het onderzoek van Diophantische vergelijkingen. Siegel bewijst n.l., dat de eenige algebraïsche krommen, die door oneindig veel roosterpunten van het vlak gaan, rechte lijnen, hyperbolen of andere, daaruit door een eenvoudige transformatie ontstane krommen van het geslacht nul zijn.

De vraag naar het gedrag van lineaire combinaties van een aantal irrationale getallen hield reeds Kronecker bezig. Ze speelt overal in de theorieën der Diophantische approximaties een groote rol.

De woorden approximatie en benadering, zullen U tijdens deze voordracht wel vertrouwd zijn geworden, doch het woord Diophantisch behoeft misschien in dit verband eenige toelichting. Men is in de wiskunde gewoon, problemen

waarin naar rationale waarden der onbekenden in vergelijkingen of ongelijkheden wordt gevraagd, te noemen naar den grooten mathematicus Diophantos van Alexandrië. Daar de door ons beschouwde approximatieproblemen neerkomen op de vraag, of aan bepaalde ongelijkheden kan worden voldaan door rationale getallen, behooren deze vraagstukken tot het gebied der Diophantische problemen. Hiertoe moeten ook vele vragen worden gerekend, die niet in direct verband staan met de irrationaliteitsproblemen als b.v. problemen uit de theorie der roosterpunten, die ik terloops reeds noemde.

De kern van een belangrijk gebied uit deze theorie der Diophantische approximaties is vervat in een artikel van H. Weyl, dat in 1916 verscheen. Om de gedachtengang van Weyl te verduidelijken, kies ik als voorbeeld het eenvoudigste geval, dat hij beschouwde, een probleem, dat echter reeds vroeger op verschillende manieren werd opgelost.

Zij a een willekeurig irrationaal getal, dat we positief zullen veronderstellen. Geen enkel getal uit de rij: $a, 2a, 3a$, enz. kan dan geheel zijn. Wel kan bewezen worden, dat er in de rij oneindig vele getallen voorkomen, die net zoo dicht bij een geheel getal liggen, als men wenscht.

Het is duidelijk, dat de resten, die men krijgt, door van elk getal der rij het aantal geheelen af te trekken, irrationale getallen zijn, die liggen tusschen 0 en 1. Men kan nu bewijzen, dat deze getalletjes op het stuk der getallenrechte tusschen 0 en 1 overal dicht liggen. Weyl bewijst zelfs, dat die verdeeling gelijkmatig overal dicht is; hij kiest voor dit begrip een definitie, die volkomen aansluit bij wat iedere leek eronder zou verstaan. Stellen we de getallenrechte voor door een koord, en winden we dit koord om een cirkel, waarvan de omtrek gelijk is aan de eenheid, dan vallen alle punten der getallenrechte, die onderling een geheel getal tot verschil hebben, op elkaar. Op dit koord geven we nu de getallen $a, 2a, 3a, \dots$ aan door knooppjes op onderling gelijken afstand a , waar a het gegeven willekeurige irrationale getal is. Het net besproken resultaat houdt nu in, dat, als men het koord maar vaak genoeg om den cirkel windt,

die knoopjes den cirkelomtrek tenslotte gelijkmatig overal dicht zullen opvullen.

Wat Weyl nu doet, is het volgende. Hij leidt een kenmerk af, waarmede men een willekeurige rij $a_1, a_2, a_3, \dots$ van irrationale getallen kan onderzoeken. Is het kenmerk van toepassing, kan men n.l. bewijzen, dat een bepaalde, door Weyl aangegeven som, waarin de getallen $a_1, a_2, a_3, \dots$ een rol spelen, tot nul zal naderen, als de rij doorloopen wordt, dan heeft men tevens bewezen, dat, indien op het koord knoopjes worden gelegd op afstanden $a_1, a_2, a_3, \dots$ van het nulpunt gerekend, deze knoopjes den cirkelomtrek weer net zoo zullen opvullen als in het vorige eenvoudige geval, n.l. gelijkmatig overal dicht.

Het kenmerk van Weyl is op verschillende rijen getallen van toepassing.

Zoo b.v. op de rij: $a, 4a, 9a, 16a, \dots$ waarin a willekeurig irrationaal is.

Een ander algemeen geval is de rij, die men verkrijgt door in een willekeurigen veelterm in x , waarin minstens één der niet-constante termen een irrationalen coëfficiënt bezit, achtereenvolgens $x = 1, 2, 3$, enz. te stellen.

Het belang van Weyl's methode wordt niet weinig verhoogd door het groote aantal toepassingen, dat mogelijk is, niet alleen op de getallenleer, doch ook op de meetkunde, ja zelfs op astronomie en physica. Ik wil volstaan met U één voorbeeld te noemen.

Wanneer een punt deelneemt aan twee loodrecht op elkaar staande harmonische trillingen, wier frequenties een rationale verhouding bezitten, beschrijft dit punt een gesloten kromme, één der bekende figuren van Lissajous. Is die verhouding der frequenties echter irrationaal, dan zal een kromme lijn worden beschreven, die, zooals men met deze theorie eenvoudig en streng kan bewijzen, den geheelen rechthoek, waarin de trillingen plaats hebben, gelijkmatig overal dicht zal opvullen, als de beweging maar lang genoeg wordt voortgezet.

Uiteraard is het niet mogelijk in deze voordracht dieper op de methoden van Weyl, hare uitbreidingen en hare toepassingen in te gaan. Ik wil echter eenige analoge problemen onder Uwe aandacht brengen, die optreden in de theorie der Diophantische ongelijkheden, welke door J. G. v. d. Corput te Groningen is opgesteld. De met deze theorie gevonden resultaten zijn voor het meerendeel nog niet gepubliceerd; ze betreffen o.a., evenals de theorie van Weyl, onderzoekingen omtrent het gedrag van oneindig voortlopende rijen van irrationale getallen $a_1, a_2, a_3, \dots$.

De eenvoudigste vraag, die gesteld wordt, luidt: komen in zulk een rij oneindig veel getallen voor, die willekeurig dicht liggen bij een geheel getal?

Nu verkrijgt men de rij in de meeste gevallen door in een functie $f(x)$ als b.v. $x \sqrt{x}$, $x \log x$, $x^2 \sqrt{2}$ achtereenvolgens $x = 1, 2, 3$ enz. te stellen. Men kan de vraag dan zoo formuleeren: bestaan er oneindig veel geheele getallen x met de eigenschap, dat $x \sqrt{x}$, (of een andere functie $f(x)$), net zoo dicht bij een geheel getal ligt als men verkiest.

Ook krijgt men vragen als deze: bestaan er oneindig veel geheele getallen x met de eigenschap, dat $x^2 \sqrt{2}$ en $x^3 \sqrt[3]{x}$ beide zeer dicht bij een geheel getal liggen.

Het is zonder meer duidelijk, dat voor die rijen, waarop het kenmerk van Weyl van toepassing is, de vraag reeds is beantwoord. Het antwoord geeft zelfs meer dan gevraagd wordt. Op vele rijen kan men echter dit kenmerk niet toepassen. Eén der nadeelen van de theorie van Weyl is n.l., dat, als het op twee rijen van toepassing is, dit niet het geval behoeft te zijn voor de rij, waarvan men de elementen verkrijgt, door de overeenkomstige elementen der beide oorspronkelijke rijen op te tellen. Zoo bestaan er een drietal, in de wiskunde veel gebruikte operaties, ten opzichte waarvan het kenmerk van Weyl niet invariant is. Hierom heeft van der Corput een nieuwe methode ingevoerd, door hem de methode der rhytmische functies genoemd.

Het gelukt met deze methode allerlei problemen op te lossen, welke met de theorie van Weyl ontoegankelijk zijn. Zoo is het met deze nieuwe methode mogelijk resultaten

te krijgen als het volgende. Men kan de getallen $\sqrt{2}$ en $\sqrt{3}$ elk met een rationale breuk net zoo dicht benaderen als men verkiest en daarbij zorgen, dat de noemer van de eene breuk gelijk is aan het kwadraat van den teller van de andere.

In deze theorie der Diophantische ongelijkheden worden nog andere problemen beschouwd, waarvan het gebleken is, dat ze veel moeilijker zijn op te lossen dan de U genoemde. Met de beide besproken methoden vindt men om een voorbeeld te noemen, dat er oneindig vele geheele getallen x zijn, waarvoor $x^2\sqrt{2}$ net zoo dicht bij een geheel getal ligt, als men verkiest. Met behulp van een derde methode, door van der Corput opgesteld, kan men echter vinden, dat er oneindig vele geheele getallen x bestaan, waarvoor de waarde $x^2\sqrt{2}$ minder van een geheel getal verschilt dan $\frac{1}{\sqrt[6]{x}}$. Zoo kan men o.a. ook bewijzen, dat het getal e kan worden benaderd door oneindig veel breuken, waarvan de noemer het kwadraat van een geheel getal x is, zoodanig, dat het verschil tusschen e en de breuk kleiner dan $\frac{1}{x^2\sqrt[6]{x}}$ is. Dergelijke benaderingen laten zich met behulp dezer methode in zeer groot aantal afleiden. Het is daarbij niet noodig een enkele getallenreeks te beschouwen, men kan meer dan één, ja zelfs een onbegrensd aangroeiend aantal tegelijk behandelen.

Een tweetal voorbeelden moge dit verduidelijken. Op twee getallenrijen heeft de volgende, met de beschreven methode afgeleide stelling, betrekking, die inhoudt, dat er oneindig veel geheele getallen x bestaan met de eigenschap, dat $x\sqrt{2}$ minder van een geheel getal verschilt dan $\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$, terwijl tegelijkertijd ex^2 minder van een geheel getal verschilt dan $\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$.

Een voorbeeld van een *onbegrensd aangroeiend* aantal getallenrijen geeft het volgende resultaat:

Men kan oneindig veel geheele getallen x vinden, met de eigenschap, dat de n getallen $x\sqrt{x}$, $x^2\sqrt{x}$, $x^3\sqrt{x}$, ..., $x^n\sqrt{x}$ alle net zoo dicht bij een geheel getal liggen als men verkiest; hierin mag men n met x laten aangroeien, mits men maar zorgt, dat dit aantal n kleiner is dan $\log \log x$.

Alle voorbeelden uit de theorie der Diophantische ongelijkheden, die ik aanhaalde, betreffen functies van slechts één variabele x . Ik volsta met te zeggen, dat deze theorie echter is opgezet voor het algemeene meerdimensionale geval, dat functies betreft van een willekeurig hoog aantal variabelen.

Zoo heb ik U dan enkele methoden uit de moderne wetkunde der benaderingen, of wilt ge der ongelijkheden geschetst en U eenige resultaten getoond, speciaal het irrationale getal betreffend. Ik kon daarbij evenmin volledig zijn in het overzicht van het geheel der bestaande theorieën, als in hare individueele behandeling. Het zal U echter duidelijk zijn geworden, hoe in bijna alle uitkomsten de teekens $<$ en $>$ veelvuldig optreden, zoodat men zich nog steeds kan afvragen: hoeveel kleiner, hoeveel groter?

Inderdaad, hoewel het mogelijk is, het irrationale getal streng arithmetisch te definieeren en te behandelen, berust in den grond al onze rekenkundige kennis van dit getal op benaderingen met en ongelijkheden tusschen rationale getallen. We kunnen het benaderen, doch niet bereiken.

Merken we echter op, dat de meetkunde hier een ander licht over spreidt: door het beeld op de getallenrechte wordt het irrationale getal voor ons bereikbaar.

Reeds uit een ruwe indeeling van de eigenschappen der dingen als ruimtelijk, physisch, biotisch, psychisch, weten we, hoe iedere eigenschap van lagere ingrijpt in die van hooger rang en daarin ingeweven is, hoe zonder kennis der lagere, studie der hoogere functies onmogelijk is.

Daar de telbaarheid een eigenschap is, die we bij *alle* dingen aantreffen, kunnen we haar als de eenvoudigste en meest fundamenteele functie der dingen beschouwen. In het irrationale getal zien we een voorbeeld, hoe deze laatste,

de arithmetische functie als het ware vooruitgrijpt op een hogere: de ruimtelijke, evenals het infinitesimaalgetal wijst op een physische eigenschap: de beweging.

Zoo blijkt ook hier de eenheid der Schepping. Tevens mag echter in het licht gesteld zijn de groote beteekenis der wiskunde voor het organisch geheel der wetenschap, waar zij op hare bescheiden plaats in den onderbouw dier wetenschap, de meest fundamenteele eigenschappen, door God in Zijn Kosmos neergelegd, tot object heeft: getal en ruimte.

Mijne Heeren Directeuren en Curatoren.

Het is me onmogelijk uit te maken aan welk der beide Colleges, door U vertegenwoordigd, ik den meesten dank ben verschuldigd voor het in mij gestelde vertrouwen, dat evenzeer uitkomt in het feit der voordracht, als in dat mijner benoeming tot dit verantwoordelijk ambt.

Gij weet in welke mate dit vertrouwen mijn zelfvertrouwen overtrof; daarom moge U uit het feit, dat ik deze eervolle benoeming aanvaardde, reeds gebleken zijn, hoezeer het mijn voornemen is, alle gaven en krachten, die God mij wil geven, te besteden aan het schoone werk, mede te bouwen aan een Universiteit, die Zijn Eere beoogt.

Mijne Heeren Professoren dezer Universiteit,

De vriendelijke bewijzen van meeleven, die ik van velen Uwer reeds mocht ontvangen, doen me voor den omgang met U, dien ik mij tot een hooge eer reken, het allerbeste verwachten. Onervaren uw kring binnentredend, spreek ik de hoop uit, dat Gij mij, waar noodig, Uw voorlichting zult verleen.

Mijne Heeren Ambtgenooten in de Wis- en Natuurkundige Faculteit,

Uiteraard zullen we bij den opbouw dezer nieuwe faculteit in veel op elkaars hulp zijn aangewezen. Zoover mijn vermogen het toelaat, kunt Ge op mij rekenen. Alles wat ik tot nog toe van U ervoer stemt me zeer hoopvol aangaande de vriendschappelijke en enthousiaste samenwerking, die ik me voor de toekomst zoo gaarne denk.

Hooggeleerde van der Corput, Hooggeachte Leermeester,

Als eerstejaarsstudent Uw inaugureele oratie bijwonend, kon ik weinig vermoeden, van hoe groot belang Uw verzekering aan de studenten, dat Gij al Uw krachten zoudt aanspannen om bij hen de belangstelling voor de wiskunde aan te wakkeren, voor mij zou zijn. Veel mocht ik van U leeren, veel dank ik U. Doch bovenal voel ik me aan U verplicht voor Uw warme belangstelling, die ik ondervond bij mijn studie, die zich uitte toen ik U aangaande het aanvaarden dezer benoeming om raad kwam vragen en die Gij ook thans weer toont door Uwe aanwezigheid te dezer plaatse, welke ik op hoogen prijs stel.

Ik hoop, dat Gij mij, ook in de toekomst, Uw raad en steun, waar ik die zal behoeven, niet zult onthouden.

Hooggeachte Heeren Oud-Rector en leeraren aan het Gereformeerd Gymnasium te Kampen,

Uit Uw kring kan ik me slechts noode losmaken. Veel hartelijkheid en ware vriendschap mocht ik er ondervinden. Gelukkig, dat deze vriendschap door mijn vertrek uit Kampen niet wordt verbroken. Weest overtuigd, dat ik steeds belang zal blijven stellen in de verdere ontwikkeling van ons Gymnasium, voor welks bloei ik de beste wenschen uitspreek.

Dames en Heeren Studenten,

Het verheugt me, dat ik de gelegenheid krijg, met U in contact te komen. Zoowel aan mijn lidmaatschap van S.S.R., te Groningen, als aan den omgang met menig lid van F.Q.I. tijdens mijn verblijf te Kampen, bewaar ik zeer aangename herinneringen; geen wonder dus, dat ik belangstellend uitzie naar N.D.D.D., het derde Corps der vroegere G.S.B.

Mochten er zich onder U bevinden, die hunne opleiding aan onze jonge faculteit willen toevertrouwen, laten zij er zich dan van overtuigd houden, dat ik voor mijn deel, alles voor hen zal doen, wat in mijn vermogen is.

Geve God Zijnen Zegen op onzen gemeenschappelijken arbeid.

Ik heb gezegd.

