

Zoo eenvoudig is het niet voor de cirkelquadratuur. Lambert had in 1766 de irrationaliteit van het getal π en van het getal e , de basis van het stelsel der natuurlijke logaritmen, bewezen. De vraag is nu: bezitten deze getallen het speciaal algebraïsch karakter, noodig voor hun constructie met passer en liniaal, of zijn ze misschien in 't geheel niet algebraïsch?

Deze vraag werd brandend toen Liouville in 1850 met behulp van reeksen aantoonde, dat er inderdaad getallen bestaan, die niet algebraïsch zijn; men noemt deze transcendent. Het gelukte in 1873 Hermite te Parijs, aan te toonen, dat het getal e , de basis van het stelsel der natuurlijke logaritmen, transcendent is en het oeroude probleem der cirkelquadratuur werd in 1882 opgelost, toen de Duitsche hoogleeraar Lindemann, voortbouwend op het geniale werk van Hermite aantoonde, dat ook π een transcendent getal is. Hiermede was zelfs bewezen, dat iedere constructie van π , die op algebraïsche operaties berust, onmogelijk is.

Wij vragen ons nu af, hoe scherp deze getallen e en π ten hoogste met een rationaal getal $\frac{x}{y}$ te benaderen zijn. Deze vraag is in 1928 door J. Popken te Groningen beantwoord. Uit Popken's publicaties blijkt, dat de kritieke waarde van den exponent, in het zooeven door ons besproken benaderingsprobleem, bij het getal e de waarde 2 bezit. Wat voor algebraïsche getallen van den graad $n \geq 3$ nog niet is opgelost, is dus bekend van het transcendente getal e . Popken's resultaat voor het getal π is veel minder scherp: dit ligt in den aard van het bewijs van Lindemann, waaraan Popken zijn gedachtengang ontleende.

Ook voor andere transcendente getallen is onderzocht, hoe goed ze ten hoogste door een rationaal getal $\frac{x}{y}$ zijn te benaderen. Zoo vond Mordoukhay-Boltowskoy voor de logarithme van een willekeurig positief algebraïsch getal $\neq 1$ een resultaat, in scherpte overeenkomend met dat van Popken voor het getal π .