

waarin naar rationale waarden der onbekenden in vergelijkingen of ongelijkheden wordt gevraagd, te noemen naar den grooten mathematicus Diophantos van Alexandrië. Daar de door ons beschouwde approximatieproblemen neerkomen op de vraag, of aan bepaalde ongelijkheden kan worden voldaan door rationale getallen, behooren deze vraagstukken tot het gebied der Diophantische problemen. Hiertoe moeten ook vele vragen worden gerekend, die niet in direct verband staan met de irrationaliteitsproblemen als b.v. problemen uit de theorie der roosterpunten, die ik terloops reeds noemde.

De kern van een belangrijk gebied uit deze theorie der Diophantische approximaties is vervat in een artikel van H. Weyl, dat in 1916 verscheen. Om de gedachtengang van Weyl te verduidelijken, kies ik als voorbeeld het eenvoudigste geval, dat hij beschouwde, een probleem, dat echter reeds vroeger op verschillende manieren werd opgelost.

Zij a een willekeurig irrationaal getal, dat we positief zullen veronderstellen. Geen enkel getal uit de rij: $a, 2a, 3a$, enz. kan dan geheel zijn. Wel kan bewezen worden, dat er in de rij oneindig vele getallen voorkomen, die net zoo dicht bij een geheel getal liggen, als men wenscht.

Het is duidelijk, dat de resten, die men krijgt, door van elk getal der rij het aantal geheelen af te trekken, irrationale getallen zijn, die liggen tusschen 0 en 1. Men kan nu bewijzen, dat deze getalletjes op het stuk der getallenrechte tusschen 0 en 1 overal dicht liggen. Weyl bewijst zelfs, dat die verdeeling gelijkmatig overal dicht is; hij kiest voor dit begrip een definitie, die volkomen aansluit bij wat iedere leek eronder zou verstaan. Stellen we de getallenrechte voor door een koord, en winden we dit koord om een cirkel, waarvan de omtrek gelijk is aan de eenheid, dan vallen alle punten der getallenrechte, die onderling een geheel getal tot verschil hebben, op elkaar. Op dit koord geven we nu de getallen $a, 2a, 3a, \dots$ aan door knooppjes op onderling gelijken afstand a , waar a het gegeven willekeurige irrationale getal is. Het net besproken resultaat houdt nu in, dat, als men het koord maar vaak genoeg om den cirkel windt,