

Voor we tot andere problemen overgaan, vermeld ik nog, dat uit een door A. Khintchine in 1924 gevonden stelling volgt, dat voor bijna alle getallen de kritieke waarde van den besproken exponent gelijk aan 2 is. Hierin is „bijna alle” op te vatten in den zin van Borel.

De onderzoekingen van Popken, waarheen we nog eens terugkeeren, dragen een algemeener karakter dan zou kunnen blijken uit het voorgaande. De grondgedachte is de volgende: Als a een willekeurig algebraïsch getal voorstelt, zullen wegens hunne transcendentie de getallen e en π beide ongelijk aan a zijn. Popken leidt nu af, hoe groot het verschil tusschen e en a en tusschen π en a elk minstens is. Hij leidt een positieve onderste grens voor deze verschillen af, die slechts afhangt van den graad en de coëfficiënten der algebraïsche vergelijking, waaraan a voldoet. Deze resultaten drukken dus uit, hoezeer (om een, op een andere stelling toegepaste, uitdrukking van Siegel te gebruiken) de getallen e en π „sich dagegen sträuben, algebraïsch zu sein.” Tevens leidt Popken een stelling af, waarin wordt uitgedrukt, hoe goed het getal e minstens door een algebraïsch getal is te benaderen, daarmee tegelijkertijd aantoonend, dat zijn resultaten voor het getal e zeer scherp zijn.

Voor π kon hij alleen aangeven, welke benadering ten hoogste mogelijk is. Dit resultaat is voor de cirkelquadratuur daarom van belang, omdat het voor iedere benaderingsconstructie van het getal π , die op algebraïsche operaties berust, een schatting aan de hand doet van de fout, die minstens gemaakt is.

Het zou me te ver voeren deze resultaten in de finesses te bespreken; liever wijs ik U op eenige merkwaardige benaderingen, die met deze een sterke analogie vertoonen. Ik merk daartoe op, dat Lindemann's onderzoekingen (later gecompleteerd door Weierstrasz) niet alleen het transcendentiebewijs van π ten gevolge hadden, doch ook aantoonde, dat iedere macht van e met algebraïschen exponent $\neq 0$, benevens de natuurlijke logaritmie van ieder positief alge-