

HET AFBEELDEN IN DE WISKUNDE

OPENBARE LES

GEHOUDEN BIJ DE AANVAARDING VAN
HET LECTORAAT IN DE WISKUNDE EN
DE ELEMENTAIRE STERREKUNDE AAN DE
VRIJE UNIVERSITEIT TE AMSTERDAM
OP VRIJDAG 14 OCT. 1938

DOOR

Dr G. H. A. GROSHEIDE F.Wzn.

P. NOORDHOFF N.V. — 1938 — GRONINGEN—BATAVIA

Lo
9

Wanneer men wenscht over te gaan tot de vervaardiging van een land- of zeekaart, staan verschillende methoden ter beschikking. Of men nu in verband met het doel, waartoe de kaart wordt gemaakt, zijn keus laat vallen op de stereografische projectie, dan wel op de mercatorprojectie of een andere projectie — steeds is het resultaat, dat met elke plaats van een zeker gedeelte der aardoppervlakte één bepaald punt van de kaart correspondeert. Meer wiskundig kan dit laatste aldus geformuleerd worden, dat men een afbeelding tot stand brengt van een gedeelte van een boloppervlak op een gedeelte van een plat vlak.

Overziet men de verschillende gedeelten niet alleen der toegepaste, maar ook der zuivere wiskunde, dan blijkt, dat daarin schier overal afbeeldingen optreden. Enkele daarvan willen wij thans wat nader bezien, eenerzijds om eenig inzicht te verkrijgen in het karakter van het afbeelden, anderzijds om vast te stellen, welke vruchten de toepassing van het afbeeldingsbeginsel afwerpt.

Wij staan terwille van de duidelijkheid nog verder bij het gekozen voorbeeld stil en vinden als wezenlijk element daarin niet, dat aan een punt op aarde een punt van de kaart wordt toegevoegd, doch dat een regel bestaat volgens welken zulks kan geschieden. Moet de toevoeging werkelijk volledig worden uitgevoerd, dan komt het werk slechts klaar, indien de kaart niet anders dan een eindig aantal punten, bijvoorbeeld alle steden met meer dan 10.000 inwoners behoeft te bevatten. Het voornaamste is het *voorschrift*, dat in staat stelt bij elk punt het beeldpunt te construeeren.

Zijn in de elementaire meetkunde twee gelijkstandige gelijkvormige driehoeken gegeven, dan kunnen wij als beeld van een punt van den eenen driehoek beschouwen het punt van den anderen, dat te verkrijgen is door de verbindingslijn van het oorspronkelijke punt en het gelijkvormigheidscentrum te snijden met de overeenkomstige zijde in den tweeden driehoek. De toegepaste regel is hierbij zuiver meetkundig, hetgeen lang niet algemeen het geval is.

In de cartographie begint men meestal met aan een punt op aarde lengte en breedte of andere coördinaten toe te kennen, om vervolgens op het teekpapier eveneens een coördinatenstelsel in te voeren. Daarna kan men — zooals gewoonlijk wordt gezegd — de afbeeldingswet eenvoudig uitdrukken met behulp van een aantal betrekkingen tusschen de coördinaten in beide stelsels.

Zonder beantwoord te hebben de met elkaar verband houdende vragen of dit spraakgebruik verklaarbaar is en of de oorspronkelijke afbeelding feitelijk niet door een andere is vervangen, kunnen wij reeds zeggen, dat de laatste uitspraak niet geheel volledig is, daar wij nauwkeurig bezien niet met één doch met drie afbeeldingen te doen hebben. Immers invoeren van coördinaten op den bol en in het platte vlak is aan elk punt daarvan een geordend paar van getallen toevoegen en dit wordt in de wiskundige taal ook afbeelden genoemd. Zulks is alleen mogelijk, doordat het begrip afbeelden een zóó ruime beteekenis heeft verkregen, dat een wezenlijke eigenschap van alle afbeeldingen in fotografie en schilderkunst en trouwens ook van alle projecties in de beschrijvende meetkunde nl. dat het beeld van een punt weer een punt is, verloren is gegaan.

Ter voorkoming van misverstand, merken wij op, dat deze verruiming van beteekenis volkomen los staat van de verarithmetisering der meetkunde. Zoo hebben wij in de *cyclographie* een afbeelding van de punten der ruimte op de georiënteerde cirkels van een plat vlak. Men voegt daarbij aan een willekeurig punt P der ruimte den cirkel van het vlak V toe, die als middelpunt heeft het voetpunt van de loodlijn uit P op V en als straal den afstand van P tot V en denkt zich dezen cirkel in positieven of negatieven zin doorloopen, al naar gelang het punt P zich aan de eene of aan de andere zijde van het vlak V bevindt.

Na het voorgaande is het duidelijk, dat de mogelijkheid van afbeelden volkomen onafhankelijk is van den aard der dingen, die afgebeeld worden. Daartoe is slechts van belang, dat zij bestaan en tezamen op een of andere wijze een grooter geheel vormen. En hetzelfde geldt voor de wiskundige objecten, die als beelden optreden. Wij zijn dus beide malen gerechtigd om geheel abstract te spreken van een verzameling van elementen en definiëeren afbeelden als het toevoegen van de elementen van een tweede aan die van een eerste verzameling.

Op grond van de gegeven voorbeelden meent men misschien, dat in de definitie van afbeelden iets moet worden opgenomen omtrent de wijze, waarop de elementen aan elkaar worden toegevoegd. Met een punt op aarde correspondeerde één punt der kaart en omgekeerd was een punt van de kaart beeld van slechts één plaats op aarde. Zoo was eveneens bij de andere afbeeldingen aan één element der ééne verzameling één en niet meer dan één element der andere toegevoegd. Nu stellen inderdaad sommigen in hun omschrijving van een afbeelding aan de toevoeging den eisch, dat zij deze eigenschap, die men omkeerbare eenduidigheid of eeneenduidigheid noemt, moet bezitten. Hiermede wordt dan de naam afbeelding alleen toegekend aan een deel der correspondenties, want deze zijn niet alle omkeerbaar eenduidig. Voegt men aan elk punt van een cirkel de middellijn toe, die er door gaat, dan verkrijgt men een afbeelding van de punten van den cirkelomtrek op de koorden door het middelpunt, die wel eenduidig, maar niet omkeerbaar eenduidig is, daar elke middellijn bij twee punten van den cirkelomtrek behoort.

Met de vaststelling van het feit, dat afbeelden, hetzij met toevoegen, hetzij met eeneenduidig toevoegen identiek is, verdwijnt de verwondering over de veelvuldige toepasbaarheid ervan. Immers ook het moderne begrip van een functie dekt geheel dat van een toevoeging. Het voorschrijven van een regel volgens welken aan elk reëel getal een ander reëel getal wordt toegevoegd, dat wil zeggen volgens welken de verzameling der reële getallen op zichzelf of op een harer deelverzamelingen wordt afgebeeld, is geheel hetzelfde als het definieeren van een reële functie voor alle reële waarden van één veranderlijke. Op overeenkomstige wijze zijn meerwaardige functies, analytische functies van een complexe veranderlijke en functies van een aftelbaar oneindig of eindig aantal veranderlijken te beschouwen als voorschriften voor afbeeldingen van verzamelingen.

Ten besluite van ons onderzoek naar het karakter van het afbeelden zij nog vermeld de uitspraak, dat een functioneele betrekking wordt opgebouwd door elementenparen. Natuurlijk is een werkelijke paarvorming weer alleen volledig uitvoerbaar, indien men te doen heeft met twee eindige verzamelingen. Wij ontdekken hier den abstracten achtergrond van hetgeen gebeurt, wanneer bij de punten eener graphische voorstelling tusschen

haken wordt aangegeven, welke coördinaten zij bezitten of wanneer bij een meetkundige afbeelding twee corresponderende punten eenzelfde hoofdletter dragen eenmaal zonder en eenmaal met accent.

In de tweede plaats geven wij een overzicht van de verschillende afbeeldingen, door een indeeling daarvan te maken op grond van het aantal elementen van de tweede verzameling, dat in het algemeen aan een willekeurig element van de eerste wordt toegevoegd. Wij mogen niet verder gaan dan spreken van „in het algemeen”, want bij vele afbeeldingen komen *singuliere elementen* voor, dat zijn elementen van de eerste verzameling, waarmede hetzij geen, hetzij oneindig veel elementen van de tweede corresponderen. Het aantal, dat dus als criterium voor een eerste hoofdindeeling werd gekozen, kan om te beginnen oneindig groot zijn. Wanneer in een plat vlak aan een punt worden toegevoegd alle punten, die daarmede poolverwant zijn ten opzichte van een vaste kegelsnede, vormen de beelden een geheele rechte lijn, de zoogenaamde poollijn. De afbeeldingen dezer klasse, waartoe men ook de cyclometrische functies moet rekenen, blijven verder buiten beschouwing.

Gezamenlijk kunnen worden besproken de afbeeldingen, waarbij met een zeker element der eerste verzameling een weliswaar eindig, doch van één verschillend aantal elementen der tweede correspondeert. In de functietheorie zijn deze vertegenwoordigd in de meerwaardige functies, waarvan $\sqrt{x}$ een voorbeeld is, omdat bij één waarde van x twee waarden van den wortel n.l. een positieve en een negatieve behooren. Ook spelen deze afbeeldingen een voorname rol in de meetkunde van het aantal. Daarin toch wordt veelvuldig gebruik gemaakt van een correspondentiebeginsel, dat in zijn eenvoudigsten vorm aldus luidt: Indien twee veranderlijke punten A en B van een rechte algebraïsch zóó met elkander verbonden zijn, dat bij ieder punt A m punten B en bij ieder punt B n punten A behooren, liggen op de rechte $m + n$ punten, waarin een punt A met een corresponderend punt B samenvalt.

Met deze weinige opmerkingen omtrent de algemeene $[m, n]$ -verwantschap volstaan wij, om verder uitsluitend te spreken over afbeeldingen van het eenig overgebleven type, te weten de eenduidige. Deze beperking is niet willekeurig, doch steunt op een speciale eigenschap der eenduidige afbeeldingen. Wanneer een verzameling wordt afgebeeld op een tweede en vervolgens deze

tweede op een derde, is met een omweg ook een afbeelding tot stand gebracht van de eerste op de derde verzameling. Deze laatste afbeelding is in het algemeen van een ander type dan de beide oorspronkelijke, waarvan zij het *product* wordt genoemd. Slechts indien eerste en tweede afbeelding beide eenduidig zijn, is dit met hun product ook het geval.

Een verder overzicht der eenduidige afbeeldingen is te verkrijgen door te letten op de omgekeerde afbeelding, dat is de afbeelding van de tweede verzameling op de eerste, die ontstaat door aan elk element der tweede verzameling die elementen van de eerste toe te voegen, waarvan het beeldelement is bij de oorspronkelijke afbeelding. Immers is terstond duidelijk, dat onder de eenduidige afbeeldingen weer een speciale plaats zal worden ingenomen door de exemplaren, waarvan het omgekeerde ook eenduidig is en die dus zelf omkeerbaar eenduidig zijn (eventueel met singuliere elementen). Behalve een eerste onderverdeling van de eenduidige afbeeldingen in omkeerbaar eenduidige en niet omkeerbaar eenduidige is echter nog een tweede onderverdeling gemotiveerd en wel een op grond van het al dan niet continu zijn.

In het vervolg wordt bij een eeneenduidige afbeelding zonder meer steeds ondersteld, dat de afbeelding evenmin als haar omgekeerde singuliere elementen bezit. Alle verzamelingen, die aldus op een gegeven verzameling zijn af te beelden, kunnen ook op elkaar omkeerbaar eenduidig worden afgebeeld en vormen een verzameling, die door elk harer elementen volkomen is bepaald. Deze laatste bevat niet alle verzamelingen, want bij twee willekeurige is men in het algemeen niet in staat een eeneenduidige correspondentie tusschen de elementen te construeeren. Wij noemen daarom twee verzamelingen, die omkeerbaar eenduidig op elkaar zijn af te beelden gelijkmachtig of *aequivalent* en zeggen ook wel, dat zij eenzelfde machtigheid of *cardinaalgetal* bezitten.

Het schijnt gewenscht er de aandacht op te vestigen, dat het steeds gaat over de mogelijkheid twee verzamelingen eeneenduidig op elkaar af te beelden. Uit het bestaan daarvan mag niet worden afgeleid, dat omgekeerd elke afbeelding van de eene op de andere omkeerbaar eenduidig is. Tusschen de punten van een kegelsnede en die van een rechte in hetzelfde projectieve vlak ontstaat een eeneenduidige correspondentie, als wij de kegelsnede op de rechte projecteeren van een op haar gelegen punt uit, daarentegen een

eentweeduidige correspondentie als wij het projectiecentrum buiten de kegelsnede en de rechte kiezen. Voorts heeft men naast de niet-singuliere ook de singuliere collineaties.

In de gelijkmachting hebben wij een uitbreiding van het begrip „even-groot-zijn”. Immers twee eindige verzamelingen zijn slechts eeneenduidig op elkaar af te beelden, als zij evenveel elementen bevatten, zoodat de eigenschap van het „even groot zijn” wordt vervangen door die der aequivalentie, welke ook beteekenis heeft voor oneindige verzamelingen. Tegelijkertijd neemt de machting of het cardinaalgetal de plaats in, die vroeger het minder omvattende begrip „aantal elementen” bezette.

Evenals gelijkheid is ook ongelijkheid in grootte van twee oneindige verzamelingen te definieeren met behulp van een eeneenduidige afbeelding. Een verzameling heet kleiner dan een tweede, als zij met een deelverzameling daarvan, doch niet met die tweede zelf aequivalent is. Het probleem van het al of niet bestaan van een schaal der machtingen, dat wil zeggen van het al of niet mogelijke van een rangschikking der oneindige verzamelingen naar grootte is thans herleid tot dat der vergelijkbaarheid van twee verzamelingen. Wij moeten nagaan of van twee gegeven niet-aequivalente verzamelingen steeds één een deelverzameling bevat, die met de volledige andere verzameling aequivalent is. Populair gezegd of van twee niet evengroote verzamelingen steeds één even-groot is als een gedeelte van de andere. Dit nu kunnen wij inderdaad aantoonen en wel door gebruik te maken van een stelling van Zermelo nl. dat elke verzameling welgeordend kan worden.

Bij de verdeeling der eenduidige afbeeldingen in eeneenduidige en niet eeneenduidige hebben wij thans wel voldoende stil gestaan, zoodat wij kunnen overgaan tot het toelichten van de splitsing op grond van continuïteit. Wij keeren daartoe nog eens terug tot het in het begin gegeven voorbeeld en constateeren, dat zonder uitzondering alle plaatsen op aarde, die slechts een kleinen afstand van een bepaalde stad zijn verwijderd, op de kaart worden afgebeeld door punten, die zich in de buurt van het beeldpunt der stad bevinden. Deze eigenschap, zonder welke een kaart volkomen onbruikbaar is, berust op de continuïteit der bij de vervaardiging gebezigde projectiemethode.

Van een continue afbeelding van, op of in een verzameling kunnen wij alleen spreken, als zij tot een *omgevingsruimte* is

gemaakt. Dit geschiedt door voor elk harer elementen (thans *punten* genoemd) zekere deelverzamelingen als omgevingen te definiëren. Een afbeelding heet dan in een punt P continu, als bij iedere omgeving van het beeldpunt P' minstens één omgeving van het punt P behoort, die geheel binnen die omgeving van P' wordt afgebeeld. Is een afbeelding in elk punt continu, dan betitelt men haar kortweg met continu. Door geschikte keuze van de axioma's, waaraan de omgevingen moeten voldoen, is te bereiken, dat in de gevallen, waarin de afbeelding is bepaald door functies, voor de continuïteit daarvan noodig en voldoende is de continuïteit dezer afbeeldingsfuncties.

De tweede onderverdeling, die wij van de eenduidige afbeeldingen maken door te scheiden continue en niet continue, is van de eerste onafhankelijk, want er komen zoowel omkeerbaar eenduidige als niet omkeerbaar eenduidige onder de continue voor en men heeft zoowel continue als niet continue eeneenduidige afbeeldingen. Bij de continue afbeeldingen onderscheiden wij verder nog omkeerbaar continue en niet omkeerbaar continue. De niet-identiteit der onderverdelingen volgt ook daaruit, dat voor de eerste evenmin als voor de hoofdverdeling beeld en voorwerp eenige andere eigenschap behoeven te bezitten, dan dat het geheel zijn opgebouwd uit deelen, terwijl de tweede onderverdeling onderstelt, dat voor beide relaties tusschen de deelen zijn gedefinieerd berustend op het begrip omgeving.

Een tweede hoofdverdeling kunnen wij maken door eerst samen te voegen de afbeeldingen, waarvan beide verzamelingen geen gelijksoortige elementen bezitten, zoodat bijvoorbeeld punten met rechten correspondeeren en daarna bijeen te nemen de overgebleven afbeeldingen, waarvoor de elementen gelijksoortig zijn met de beeldelementen en derhalve punten aan punten worden toegevoegd, getallen aan getallen, enz.

In het eerste geval kan het gebeuren, dat de elementen der beeldverzameling deelverzamelingen zijn van de verzameling, die afgebeeld wordt. Zoo wanneer men de reeds beschouwde poolverwantschap t.o.v. een kegelsnede opvat als een correspondentie tusschen punten en puntenreeksen.

Onder de afbeeldingen van de tweede soort zijn opnieuw twee typen op te merken en wel afbeeldingen van verzamelingen op zichzelf en afbeeldingen van verzamelingen op andere. Het is

terstond in te zien, dat er zeker afbeeldingen van het eerste type bestaan, want iedere verzameling is identiek op zichzelf af te beelden, door elk element ervan aan zichzelf toe te voegen. Verder noemen wij de overgangen van een rechthoekig cartesisch coördinatenstelsel in een euclidisch plat vlak op een ander. Immers wordt het getallenpaar, dat men bij een zeker punt van het vlak kan plaatsen, toegevoegd aan dat, hetwelk men na afloop daarbij kan schrijven en heeft in de coördinatentransformatie een afbeelding plaats van de verzameling der geordende getallenparen op zichzelf.

Een belangrijk vraagstuk, dat zich bij elke afbeelding van dit type voordoet, is het opsporen van de elementen, die met hun beeld samenvallen. Zoo bezit bijvoorbeeld de algemeene projectieve transformatie van het projectieve vlak in zichzelf drie dergelijke dubbelpunten en heeft een continue zelfafbeelding van een bol steeds minstens één dubbelpunt.

Zoowel de afbeeldingen van de eerste soort, als die van beide typen van de tweede soort, kan men verder rubriceeren door diegene samen te voegen, waarvan voorwerp en beeld twee bepaalde gegeven eventueel samenvallende verzamelingen zijn. Deze nadere verdeeling was ook mogelijk na de eerste hoofdverdeeling en de daarbij behorende onderverdeelingen, doch had toen minder zin, omdat — zooals reeds werd opgemerkt — twee verzamelingen bijvoorbeeld zeer goed zoowel eeneenduidig als eentwee-duidig op elkaar afbeeldbaar kunnen zijn.

Onder de afbeeldingen van een gegeven verzameling op een tweede gegeven nemen natuurlijk de omkeerbaar eenduidige weer een bijzondere plaats in. In een speciaal geval kunnen wij daarvan een onderverdeeling maken, die verder gaat dan die in omkeerbaar en niet omkeerbaar eenduidige.

Wij verstaan met Brouwer onder een *complex* een omgevingsruimte, die een bepaalde splitsing in simplexen toestaat en laten zien, dat de eenduidig continue afbeeldingen van een dergelijk complex in of op een eventueel daarmede samenvallend tweede, zich laten onderbrengen in afbeeldingsklassen. Vooraf ga ter verduidelijking een voorbeeld.

Wentelen wij een boloppervlak een weinig om een zijner middellijnen, dan verkrijgen wij een eenduidige continue zelfafbeelding daarvan. Wij vergelijken deze met een tweede van hetzelfde type, die na voortgezette wenteling ontstaat en constateeren, door te

letten op de tusschenstanden, die worden ingenomen, dat beide afbeeldingen het begin en het eind vormen van een continue reeks van gelijksoortige. Vervangen van alle punten van het boloppervlak door hun tegenpunten, geeft een derde eenduidige continue zelfafbeelding daarvan, die niet continu uit de eerste is te verkrijgen, daar ze anders dan deze den omloopszin van kleine cirkels op het boloppervlak omkeert.

Stappen wij van dit speciale geval, waarin de afbeeldingen bovendien eeneenduidig en omkeerbaar continu of topologisch zijn af en beschouwen wij weer algemeen eenduidig continue, dan kan tusschen twee daarvan ook een continue reeks van afbeeldingen bestaan. Wij zeggen nu, dat de eerste in de tweede homotoop is te deformeeren. Op het feit, dat deze eigenschap zoowel reflexief als transitief is, berust de mogelijkheid alle eenduidige continue afbeeldingen van een willekeurig complex op zichzelf of in een ander te verdeelen in klassen, de zoogenaamde afbeeldingsklassen, die elk uitsluitend homotoop in elkaar deformeerbare afbeeldingen bevatten. Uit ons voorbeeld bleek, dat de wentelingen en spiegelingen van een boloppervlak in zichzelf, tot verschillende afbeeldingsklassen moeten worden gerekend, hoewel beide afbeeldingen topologisch zijn. Terwijl er hier niet meer dan deze twee zijn heeft men op het ringoppervlak zelfs oneindig vele klassen van topologische zelfafbeeldingen.

Gekomen aan het einde van de behandeling van enkele mogelijke indeelingen der afbeeldingen, stellen wij vast, dat hetgeen wij deden in wezen niet anders was, dan het definieeren van deelverzamelingen binnen de verzameling van alle afbeeldingen. Deze opmerking doet uitkomen, dat er ook verzamelingen bestaan met afbeeldingen als elementen, waaruit voortvloeit, dat bij een of andere afbeelding het beeld van een punt een afbeelding kan wezen. Elke verschuiving van een euclidische rechte lijn in zichzelf is te beschouwen als een zelfafbeelding der rechte. Een willekeurig exemplaar van de oneindige verzameling dezer afbeeldingen is bepaald door het punt, waarin een vast punt wordt afgebeeld. Met ieder punt der rechte staat hierdoor een afbeelding der verzameling in correspondentie, en derhalve worden de punten der rechte eenduidig afgebeeld op de verzameling aller verschuivingen.

Bij de afleiding van het begrip gelijkmachtheid van twee verzamelingen, hebben wij medegedeeld, wat onder het product van

twee afbeeldingen was te verstaan. Natuurlijk bezitten twee afbeeldingen slechts een product, indien de beeldverzameling van de eerste, de afgebeelde van de tweede is. Is nu per definitie een groep een verzameling, waarvoor een aan bepaalde eigenschappen voldoende vermenigvuldiging is gedefinieerd, zoodat aan elk geordend tweetal elementen een derde element der verzameling, genaamd het product, is toegevoegd, dan kan een aantal afbeeldingen slechts een groep vormen, indien alle exemplaren zelfafbeeldingen zijn. Voorbeelden van groepen hebben wij in de verzameling aller eeneenduidige zelfafbeeldingen en in die aller topologische zelfafbeeldingen eener gegeven verzameling, terwijl de juist genoemde verschuivingen van een rechte lijn in zichzelf een eenledige continue groep opbouwen.

Wij bespreken in de derde plaats enkele toepassingen van het afbeelden en beginnen met er op te wijzen, dat in de stereometrie uitsluitend eigenschappen van oppervlakken en lichamen worden opgespoord, die behouden blijven, wanneer de beschouwde figuren op een of andere wijze in de ruimte worden verplaatst. Breiden wij alle mogelijke verplaatsingen van een oppervlak of lichaam in de ruimte uit tot bewegingen van de geheele euclidische driedimensionale ruimte in zichzelf, dan ontstaat een verzameling zelfafbeeldingen, die een groep is. Toepassen van een exemplaar dezer groep geeft beeldfiguren, die met hun oorspronkelijk alle stereometrische eigenschappen gemeen hebben. Deze eigenschappen zijn dus bestand tegen of invariant voor de groep van zelfafbeeldingen of, zooals men gewoonlijk zegt, transformatiegroep.

Het blijkt, dat de stereometrie in wezen niet anders is dan de invariantentheorie voor een bepaalde de vorige omvattende groep. Dit is van groot belang, want hebben twee congruente of stereometrisch aequivalente figuren volkomen dezelfde stereometrische eigenschappen, dan kan met de bestudeering van een ervan worden volstaan. Het geoorloofd zijn van een overeenkomstige beperking is voor elke meetkunde een vereischte. Immers zijn na de bestudeering van één der *figuren* genaamde verzamelingen, waarop de meetkunde betrekking heeft niet tevens de bijzonderheden van een groot aantal andere bekend, dan is de geheele studie een vrij onbegonnen werk. Derhalve zal elke meetkunde een middel moeten bezitten om van twee figuren na te gaan of zij op het ingenomen standpunt als identiek zijn te beschouwen. Nu is vergelijken van

twee figuren feitelijk toevoegen van de elementen der eene aan die van de andere figuur, dus tot stand brengen van een afbeelding. Een middel als gezocht heeft men dientengevolge in het onderzoek of de eerste figuur op een bepaalde vooraf vastgestelde wijze op de tweede is af te beelden. Elke meetkunde zal in correspondentie moeten staan met een zekere verzameling van afbeeldingen en tot inhoud hebben het opsporen van eigenschappen, die bij deze afbeeldingen behouden blijven.

Niet alle verzamelingen van afbeeldingen van zekere figuren zullen bij een meetkunde kunnen behooren. Immers bezit figuur A alle eigenschappen van figuur B, dan heeft omgekeerd B alle eigenschappen van A, zoodat een verzameling, die een afbeelding van A op B bevat, er ook een van B op A moet bevatten. Is verder aanwezig een afbeelding van B op C, dan moet dit ook het geval zijn met een van A op C, want hebben eveneens B en C alle eigenschappen gemeen, dan ook A en C.

Onder de verzamelingen, die wij bij onze indeelingen ontmoeten, bevinden zich enkele uitgebreide geoorloofde verzamelingen, die leiden tot zeer algemeene meetkunden. Dit is aan te toonen, door te bewijzen, dat zij aan de zoo juist opgesomde voorwaarden voldoen. Het is van te voren te verwachten, dat de beide hoofdverdelingen ons zullen doen uitkomen bij meetkunden van verschillend karakter.

Een eerste voorbeeld van een toegelaten verzameling is die aller eeneenduidige afbeeldingen, daar de omgekeerde van een willekeurig exemplaar weer tot de verzameling behoort en eveneens, indien dit bestaat het product van twee exemplaren. Uit de identiteit van omkeerbaar eenduidig op elkaar afbeeldbaar zijn en gelijkmachtig zijn, volgt dat in de bijbehorende meetkunde alle figuren volkomen zijn getypeerd door één enkel gegeven nl. hun machtigheid. Aangezien deze dus het al of niet voorkomen van eventueele andere voor eeneenduidige afbeeldingen invariante eigenschappen bepaalt, zal men geneigd zijn te vermoeden, dat het bezitten van een bepaalde dimensie een gevolg is van het bezit van een bepaalde machtigheid. Zulks echter ten onrechte, want, daar het mogelijk is een rechte lijn omkeerbaar eenduidig op een plat vlak af te beelden, bestaan er gelijkmachtige figuren met verschillende dimensies. Evenmin als tegen elke eeneenduidige afbeelding is het dimensiegetal bestand tegen elke eenduidig

continue, hetgeen Peano in staat stelde een kromme te construeeren, die een geheel vierkant opvult. De oogenschijnlijk voor figuren fundamenteele eigenschap van het aantal dimensies is eerst voor eeneenduidige, omkeerbaar continue of topologische afbeeldingen invariant.

De verzameling aller topologische afbeeldingen, waartoe wij hiermede gekomen zijn, is een tweede voorbeeld van een bruikbare verzameling.

In de topologie, dat is de meetkunde, die de eigenschappen van topologisch afbeeldbare figuren bespreekt, welke invariant zijn voor topologische afbeelding, heeft het dimensiegetal niet zoo groote beteekenis als het cardinaalgetal in de vorige meetkunde. Gelijkheid van dimensie waarborgt geen topologische aequivalentie of homomorphie en kan gepaard gaan met het bezit van verschillende topologische eigenschappen. Boloppervlak en ringoppervlak zijn beide tweedimensionaal, doch kunnen niet eeneenduidig omkeerbaar continu op elkaar worden afgebeeld, zooals blijkt uit het onderscheiden aantal klassen van topologische zelfafbeeldingen, dat, naar wij mededeelden, op elk bestaat. Dit aantal is $n!$ voor twee homomorphe figuren even groot en zal voor elke figuur, die topologisch beeld van het boloppervlak kan wezen, twee zijn. Wij merken nog op, dat homomorphie met een bepaalde figuur een eigenschap is, die bestand is tegen topologische afbeelding, zoodat evengoed als het vaststellen van gelijkmatigheid van twee figuren in de vorige, het aantoonen van homomorphie in deze meetkunde een belangrijk onderdeel zal vormen.

Als derde voorbeeld kiezen wij een verzameling voorkomend bij de tweede hoofdindeeling $n!$ de groep aller zelfafbeeldingen van een gegeven figuur. De bijbehorende meetkunde bespreekt van één enkele hoofdfiguur alle eigenschappen, daar deze vanzelfsprekend bij elke zelfafbeelding behouden blijven. Figuren, die een deel van de hoofdfiguur vormen, zullen in het algemeen weinig eigenschappen bezitten, die invariant zijn voor de geheele groep en dus in de betrokken meetkunde thuis behooren. Wenscht men de bijzonderheden van de hoofdfiguur met al haar onderdeelen volledig te kennen, dan kan men beginnen met van de groep van zelfafbeeldingen alle deelverzamelingen te bepalen, waarvoor de boven aan de geheele verzameling gestelde eischen zijn vervuld. Deze deelverzamelingen zijn opnieuw groepen van zelfafbeeldingen

of transformatiegroepen, welke aanleiding geven tot meetkunden binnen de hoofdfiguur, waarin ook boven uitgesloten eigenschappen der deelfiguren een plaats hebben. Natuurlijk is iedere eigenschap, die invariant is voor de geheele groep, tevens invariant voor een willekeurige ondergroep. Zoo is bijvoorbeeld iedere projectieve eigenschap der driedimensionale ruimte tevens een stereometrische eigenschap, omdat de groep der bewegingen en spiegelingen een ondergroep is van de projectieve groep.

Onder de eigenschappen van de deelfiguren kunnen er voorkomen, die een gevolg zijn van het tot de hoofdfiguur behooren. Zulke zal men dus niet vinden, indien men de deelfiguur op zichzelf beschouwt of als onderdeel van een andere hoofdfiguur. Terwijl in de planimetrie twee symmetrische driehoeken zich onderscheiden door een tegengestelde orientatie, kan in de stereometrie aan driehoeken geen omloopszin worden toegekend. Ombuigen van een rechthoekige strook tot twee overstaande zijden samenvallen kan zóó geschieden, dat een cylindervormige band ontstaat of zóó, dat een band wordt gevormd, waarin zich een geheele slag bevindt. Natuurlijk zijn deze figuren homomorph, doch men zal dit niet gevonden hebben na volledige behandeling van alle meetkunden, die de invariantentheorie zijn van een groep van topologische zelfafbeeldingen der driedimensionale ruimte, waarin de figuren zijn gedefinieerd. Tot invariant van een transformatiegroep is de genoemde homomorphie te maken door de figuren op te nemen in een vierdimensionale ruimte en de zelfafbeeldingen daarvan te bezien.

Wordt een hoofdfiguur eeneenduidig afgebeeld op een andere, dan gaan alle transformaties van een daarvoor bekende groep over in zelfafbeeldingen van de tweede, die weer een groep vormen. Twee deelfiguren van de eerste hoofdfiguur, die in de meetkunde behoorend bij de eerste groep congruent zijn, bezitten beeldfiguren, die congruent zijn in de meetkunde van de tweede hoofdfiguur behoorend bij de tweede groep. Elke eigenschap van een figuur in de eerste meetkunde zal dan ook correspondeeren met een eigenschap van haar beeldfiguur in de tweede meetkunde, zoodat de eene meetkunde met behulp van de afbeelding uit de andere is te verkrijgen. In de praktijk maakt men hiervan soms gebruik, wanneer men in een bepaalde meetkunde niet of niet eenvoudig in staat

is een stelling te bewijzen of ook een ingewikkelde stelling wenschte te verduidelijken.

De eerste opgave, die men zich gesteld ziet, is uit de met de gegeven hoofdfiguur aequivalente figuren er een te kiezen om te fungeeren als tweede hoofdfiguur. Al speelt bij deze keus persoonlijke voorkeur een zekere rol, toch zijn, zooals Schaake opmerkt, wel enkele regels te vinden, welker inachtneming de kans, dat de afbeelding het gewenschte resultaat oplevert, verhoogt. Vooral in aanmerking komen puntverzamelingen en daaronder weer de lineaire ruimten, omdat de meetkunden, die stelsels van punten bestudeeren eenvoudiger en bovendien langer beoefend zijn dan vele andere. Verder heeft men te bedenken, dat voldoende moet zijn onderzocht, welke soorten afbeeldingen van de eerste hoofdfiguur op de tweede mogelijk zijn. Immers moet ook de tweede opgave n.l. het construeeren van een eeneenduidige afbeelding, waarbij de beeldfiguren der beschouwde en de beeldeigenschappen niet ingewikkeld van aard zijn, eenvoudig zijn te volbrengen en met dezen eisch kan bij het kiezen der tweede hoofdfiguur alleen rekening worden gehouden, indien reeds classificaties van de afbeeldingen der oorspronkelijke hoofdfiguur op andere bekend zijn.

Uit het feit, dat men weet, dat beide hoofdfiguren aequivalent zijn, volgt, dat tenminste één omkeerbaar eenduidige afbeelding van de eene op de andere bekend moet zijn. Zijn alle dergelijke afbeeldingen, die men kent, onbruikbaar voor het gestelde doel, dan komt men soms vooruit door eerst een eeneenduidige afbeelding met singuliere elementen te nemen en vervolgens te trachten deze om te zetten in een zonder singuliere elementen door aan de gekozen hoofdfiguur hetzij elementen toe te voegen, hetzij elementen te onttrekken. Feitelijk beteekent dit een overgaan op een nieuwe tweede hoofdfiguur.

Als eerste voorbeeld hiervan behandelen wij de afbeelding van een boloppervlak op een zijner raakvlakken, die projectie van al zijn punten op het raakvlak uit het tegenpunt van het raakpunt tot stand brengt. Bij deze methode van afbeelden, die in wezen niet verschilt van de door Hipparchus terwille van de sterrekunde geconstrueerde stereografische projectie, correspondeert met elk punt op den bol, behalve met het centrum van projectie één enkel punt van het vlak, terwijl aan elk punt van het vlak één punt van het boloppervlak is toegevoegd. Sluiten wij nu het vlak niet zooals

gewoonlijk met een oneindig verre rechte, doch met een oneindig ver punt af, dan verkrijgen wij een nieuwe tweede hoofdfiguur, die den samenhang van het boloppervlak heeft en daarvan het zonder uitzondering omkeerbaar eenduidige beeld kan zijn. Ook is het mogelijk aan het boloppervlak den samenhang van het euclidische vlak te geven en wel door daaraan het centrum van projectie te onttrekken.

Een meer sprekend voorbeeld bieden de eeneenduidige afbeeldingen der lijnelementen van een projectief plat vlak op de punten van een lineaire driedimensionale ruimte. Die, waarbij zonder uitzondering aan elk lijnelement, dat is de figuur gevormd door een (eventueel oneindig ver) punt en een daar door heen gaande rechte, (die eventueel met de oneindig verre rechte kan samenvallen), een punt der ruimte omkeerbaar eenduidig is toegevoegd, bezitten geen eenvoudig type. Een zoodanige afbeelding blijkt echter mogelijk, nadat aan de ruimte een verzameling punten is toegevoegd. Dit kan o.a. zóó geschieden, dat de ruimte daardoor den samenhang verkrijgt van een in een lineaire zevendimensionale ruimte gelegen driedimensionale variëteit van den zesden graad. De projectieve meetkunde der lijnelementen is daarmee in correspondentie gebracht met een Cremonasche ruimtemeetkunde, terwijl de projectieve transformatiegroep is overgegaan in een gemengde groep van Cremonasche punttransformaties met acht parameters.

Groote analogie met de zoo juist besprokene, vertoont de bekende door Klein ontdekte afbeelding van de rechten eener driedimensionale projectieve ruimte op de punten van een vierdimensionale variëteit van den tweeden graad gelegen in een vijfdimensionale ruimte. Bij deze afbeelding gaat de projectieve groep der driedimensionale ruimte over in de ondergroep van die der vijfdimensionale ruimte, gevormd door de projectieve transformaties, die de variëteit invariant laten.

Tenslotte vermelden wij nog een der afbeeldingen van deze soort, die in de hoogere meetkunde wegens de groote vruchtbaarheid hunner toepassing den naam *overdrachtsprincipes* hebben verkregen. Wij behandelen als voorbeeld het principe van Hesse, dat aldus is te beschrijven: Laat met iedere rechte van een projectief plat vlak corresponderen het puntenpaar, waarin zij een vaste kegelsnede snijdt en projecteer daarna deze kegelsnede uit een harer punten op een vaste rechte. Dan worden de niet georien-

teerde puntenparen der vaste rechte zonder uitzondering omkeerbaar eenduidig afgebeeld op de rechten van het projectieve vlak, terwijl de punten daarvan als beelden bezitten de involuties op de vaste rechte. Deze afbeelding doet de fundamenteele stelling, dat door twee punten steeds één rechte is bepaald, overgaan in de eveneens fundamenteele, dat twee involuties steeds een paar gemeen hebben. Uit het feit, dat een eigenschap in de eene meetkunde belangrijk is, volgt echter niet noodzakelijk, dat de corresponderende eigenschap in de andere dit ook is. Zoo worden o.a. de stellingen van Pascal en Brianchon getransformeerd in andere, die vrijwel zonder beteekenis zijn.

Wij beëindigen hiermede de bespreking van toepassingen van zuiver meetkundigen aard en geven nog enkele voorbeelden van gevallen, waarin verzamelingen van ongelijksoortige elementen optreden. De zooeven genoemde afbeelding van lijnelementen was ontleend aan een publicatie van Beck, waaraan ten grondslag lagen twee afbeeldingen door Lie geconstrueerd ten behoeve van de theorie der differentiaalvergelijkingen. Deze theorie heeft wel vele aanknoopingspunten met meetkundige problemen, doch is zuiver analytisch te behandelen en de afbeeldingen van Lie dienen vooral om enkele uitkomsten te verduidelijken. Zij stelden Poincaré in staat verschillende moeilijkheden met betrekking tot de singuliere integralen van gewone vergelijkingen in x en y van de eerste orde toe te lichten, hetgeen voor de partiële differentiaalvergelijkingen in x , y en z van de eerste orde mogelijk werd door een afbeelding op een vijfdimensionale ruimte afkomstig van De Vries en Schaake. Daar volgens de gegeven algemeene definitie iedere transformatie in wezen een afbeelding is, wordt van afbeelden niet alleen ter toelichting, doch dikwijls ook ter oplossing van een differentiaalvergelijking gebruik gemaakt.

Naar het terrein van de functietheorie begeven wij ons via een afbeelding van Gauss. Wij laten met ieder complex getal $x + iy$ dat punt van een euclidisch plat vlak corresponderen, dat ten opzichte van een vast rechthoekig coördinatenstelsel de coördinaten x en y heeft en voegen omgekeerd aan ieder punt met coördinaten x , y toe het complexe getal $x + iy$. Daarmede is een afbeelding van de complexe getallen op de punten van het vlak gedefinieerd, die zonder uitzondering omkeerbaar eenduidig is, indien wij het getal oneindig niet toelaten. Doen wij dit wel, dan

moet aan het vlak een punt worden toegevoegd, waardoor dit, zooals wij bij de stereografische projectie vonden, den samenhang van den bol verkrijgt en dus het Gaussische complexe vlak vervangen wordt door den Gaussischen complexen bol.

Teneinde nu een eenwaardige functie w van een complexe veranderlijke z meetkundig te kunnen interpreteren, hebben wij twee vlakken noodig. Beelden wij in het eene, het z -vlak, op de aangegeven wijze een waarde van de veranderlijke $z = x + iy$ af en in het andere, het w -vlak, analoog de bijbehorende waarde van de functie $w = u + iv$, dan is op grond van de functie aan een punt van het z -vlak een van het w -vlak toegevoegd. De functie bewerkt derhalve eenduidige afbeelding van het z -vlak in het w -vlak, of als zij niet voor het geheele z -vlak is gedefinieerd, van een gedeelte daarvan op een gedeelte van het w -vlak. Deze afbeelding behoeft niet omkeerbaar eenduidig te zijn, want bij functies, wier inverse niet eenwaardig is, zal een beeldpunt in het w -vlak in het algemeen met meer dan één punt van het z -vlak corresponderen. Noemen wij een gebied, waarin een eenwaardige functie w van z al haar waarden één en niet meer dan eenmaal aanneemt een *fundamenteaalgebied*, dan zijn twee fundamenteaalgebieden zonder uitzondering eeneenduidig op elkaar afbeeldbaar en wel door aan elkaar toe te voegen de punten, die bij hetzelfde punt in het w -vlak behooren. Afbeeldingen van deze soort ontmoet men vooral bij de theorie der automorphe functies, dat zijn functies met een lineaire transformatie in zichzelf.

Sommige functies zijn fraaier toe te lichten door niet af te beelden op twee verschillende, doch op twee samenvallende vlakken of bollen. Met de functie $w = z + a$ correspondeert dan een translatie van het vlak en met de functie $w = \frac{1}{z}$ een wenteling van den bol om één zijner middellijnen over een hoek van 180° .

Bij afbeeldingen van functies y van een *reële* veranderlijke kan zoowel wanneer deze functies eenwaardig, als wanneer ze meerwaardig zijn, volstaan worden met één enkel vlak, waarin een vast rechthoekig coördinatenstelsel is gekozen. Afbeeldingen van meerwaardige functies van één complexe veranderlijke geven echter zelfs bij gebruik van een z -vlak en een w -vlak nog geen voldoende verduidelijking. Men maakt hierom de functie een-

waardig en daarmede de afbeelding op het w -vlak eenduidig door het z -vlak uit te breiden tot een Riemannsch oppervlak.

Wij gaan hierop niet verder in, maar wijzen op een eigenschap die de door de functies van een complexe veranderlijke bewerkte afbeeldingen en trouwens ook andere bezitten. Wanneer de elementen van twee aequivalente verzamelingen gelijksoortig zijn en het in beide mogelijk is, dat aan de deelfiguren een bepaalde eigenschap toekomt, kan men onderzoeken of er afbeeldingen van de eerste op de tweede zijn, die de beschouwde eigenschap niet aantasten. Zijn twee oppervlakken of gedeelten daarvan gelegen binnen een euclidische driedimensionale ruimte, dan heeft elke normale kromme of rechte lijn zoowel van het eene als van het andere exemplaar een zekere lengte. Een vraag is nu of er een afbeelding van het eerste op het tweede bestaat, die *isometrisch* of *lengtetrouw* is, d.w.z. waarbij alle rechte of kromme lijnstukken overgaan in beeldfiguren van gelijke lengte. Het antwoord luidt niet steeds bevestigend, want bijvoorbeeld zijn volgens Gauss en Bonnet in een plat vlak alleen die oppervlakken isometrisch af te beelden, die deswege ontwikkelbare regeloppervlakken genoemd worden. Een merkwaardigheid van alle dergelijke lengtetrouwe afbeeldingen is, dat zij nog een tweede eigenschap invariant laten nl. de hoekgrootte en dus ook *hoektrouw* of *conform* zijn. De hoektrouw waaruit, zooals de stereografische projectie toont, niet noodzakelijk de lengtetrouw volgt, is nu de bedoelde eigenschap, die de behandelde afbeeldingen van een z -vlak op een w -vlak in het algemeen bezitten en in de functietheorie nemen onderzoekingen verband houdend met conforme afbeeldingen een belangrijke plaats in.

Bij de motiveering van de keuze van ons onderwerp gewaagden wij ook van het gebruik van afbeeldingen in de toegepaste wiskunde. Wij willen daarom nog even onze aandacht richten op de sterrekunde, waarin men de bewegingen van hemellichamen dikwijls bestudeert met behulp van een hemelbol. Dit is niet anders dan een bol met willekeurigen straal en geschikt gekozen middelpunt, waarop men alle hemellichamen geprojecteerd denkt uit het middelpunt. Elke sterrekundige zal van meening zijn, dat men hier te doen heeft met een afbeelding, daarentegen zal niet ieder instemmen met een uitspraak van een Zuid-Afrikaanschen onderzoeker, die ik wegens haar belang voor de christelijke wetenschap

hier zonder beoordeeling wil vermelden. Zij luidt: „Als een sterrekundige spreekt van „lichtjaren” is dat een beeld, dat betrekking heeft op onze aardse waarnemingen en afgeleid wordt uit onze aardse toestanden, ook afhankelijk van de al dan niet aanvaarding van een homogene ruimte en diensgevolge ook van homogene beweging — maar of de absolute werkelijkheid aan deze beeldspraak beantwoordt is daarmee nog niet beslist.”

Wij behoeven aan de gegeven voorbeelden geen andere toe te voegen om voldoende grond te hebben voor de uitspraak, dat in vele opzichten de mogelijkheid om afbeeldingen te maken het is, die den wiskundigen in staat stelt zijn taak te overzien en uit te voeren. Vaststellen hiervan is zeer belangrijk, daar de opdracht tot wetenschapsbeoefening en daarmee tot wiskundestudie door God is gegeven. Het bestaan van dezelfde relaties tusschen de elementen van oppervlakkig beschouwd dikwijls totaal onderscheiden figuren, dat de grond der overdrachtsprincipes is, wijst er op, dat deze figuren behooren tot het werk van den eenigen Schepper. Wij komen in dit verband terug op de in het begin genoemde zegswijze: „een punt is twee getallen,” voegen daaraan toe deze andere: „de figuur bij dit meetkundige bewijs dient alleen ter illustratie” en vermelden het verschijnen van een boek onder den typeerenden titel „Anschauliche Geometrie”. Deze gezegden toonen, dat er dient te worden opgepast voor het uit het oog verliezen van de groote verscheidenheid in de schepping, doordat practisch de objecten gemaakt worden tot de som van een aantal hunner eigenschappen.

Tot het begrip van een verzameling van elementen met bepaalde eigenschappen komt men, door uit de voorstelling van een ding der werkelijkheid, die kenmerken te abstraheeren en tot een denkeenheid te vereenigen, die betrekking hebben op opbouw en samenhang. Daarbij zal men uitgaande van voorstellingen van verschillende dingen kunnen komen tot dezelfde verzameling, hetgeen omgekeerd wil zeggen, dat met een bepaalde verzameling meer dan één ding in de werkelijkheid correspondeeren kan. Zoo ontstaat het probleem om bij een gegeven abstracte verzameling, die meestal een groep is, *realisaties* of „Darstellungen” te vinden. Van deze „Darstellungstheorie” moeten wij melding maken, omdat, zooals duidelijk is, twee verschillende Darstellungen van een-

zelfde abstracte groep met behulp van deze laatste op elkaar kunnen worden afgebeeld.

Bouwt men axiomatisch een tweedimensionale meetkunde op, dan begint men met de mededeeling, dat men beschouwen zal een verzameling van elementen, punten genaamd, waarbinnen deelverzamelingen, lijnen geheeten, voorkomen. Daarna gaat men enkele relaties opstellen, die per definitie tusschen punten en lijnen zullen bestaan, om vervolgens met behulp van een realisatie of model te bewijzen, dat de axioma's niet met elkaar in tegenspraak zijn. Het feit, dat de axioma's der niet-euclidische tweedimensionale meetkunde niet tot tegenstrijdigheden voeren, wordt bijvoorbeeld in het Riemannsche geval, afgeleid uit de mogelijkheid deze meetkunde af te beelden op de meetkunde van een binnen een euclidische driedimensionale ruimte gelegen bol, waarvoor men dan het vrij van tegenspraak zijn bewezen acht. Zeer merkwaardig is, dat de axioma's der projectieve vlakke meetkunde met hetzelfde doel worden gerealiseerd in de analytische meetkunde van het projectieve getallenvlak. Immers het niet tegenstrijdig zijn der axioma's daarvan steunt in laatste instantie op die van de leer der natuurlijke getallen, welke nog niet is bewezen met zuiver wiskundige middelen.

Dat desondanks deze axioma's en dientengevolge die der projectieve meetkunde vrij van tegenspraak zijn, vormt voorloopig nog een aprioristisch oordeel. Hierdoor wordt de zekerheid der wiskunde niet verminderd, want zonder aprioristische oordeelen is geen wetenschap mogelijk. Zij zijn bovendien niet opgekomen uit de rede, noch door zuivere waarneming verkregen, doch worden gewerkt door een algemeen inwendig getuigenis des Heiligen Geestes, hetwelk in den mensch kan plaats hebben, omdat hij zelf beelddrager Gods is (Hepp).



