EXISTENTIEBEWIJZEN IN DE WISKUNDE

REDE TER GELEGENHEID VAN DE 58e HERDENKING VAN DE STICHTING DER VRIJE UNIVERSITEIT OP 20 OCTOBER 1938 UITGESPROKEN DOOR DEN RECTOR MAGNIFICUS

DR. J. F. KOKSMA.

ELECTRISCHE DRUKKERIJ KLEIJWEGT LOOSDUINEN · TELEF. 396489

Deze rede is tevens afgedrukt in jaargang 1938 van het *Orgaan* der Christelijke Vereeniging van Natuur- en Geneeskundigen in Nederland.

Bij het uitspreken der rede werden, met het oog op den beschikbaren tijd, verschillende verkortingen aangebracht.

Excellenties, Ministers der Kroon;

en allen Gij, die van wat naam of rang ook, met Gezag der Overheid zijt bekleed;

Hoogeerzame Heeren Directeuren;

Edelgrootachtbare Heeren Curatoren;

Dames en Heeren Professoren, Lectoren, Privaat Docenten en Doctoren in onderscheidene Wetenschappen;

en voorts Gij allen, die door Uwe tegenwoordigheid te dezer plaatse van belangstelling in de Vrije Universiteit doet blijken en aan deze plechtige zitting ter gelegenheid der 58e herdenking van haren Dies Natalis, luister wilt bijzetten;

Zeer gewenschte Toehoorderessen en Toehoorders,

De denkende mensch, geplaatst in den rijkdom der Schepping, zoekt de werkelijkheid te grijpen.

Hij laat niet af van de vraag, of en hoe de dingen, waarmede hij van doen heeft, bestaan.

Hij wil zekerheid, of de voorstellingen, die hem vervullen, reëelen grond bezitten, dan wel hersenschimmen zijn.

Maar de werkelijkheid ligt in vele werkelijkheden en zekerheid kan gezocht langs ver uiteenloopende wegen.

Ook schiet hier de taal te kort; woorden als „bestaan", „realiteit", „werkelijkheid" zijn overbelast en wisselen van beteekenis bij den overgang van het eene gebied van leven of wetenschap naar het andere, terwijl ook binnen de grenzen van zulk een gebied, hun inhoud niet immer constant is.

Wanneer ik, deze termen door elkaar gebruikend, *werkelijk, reëel,* noem, alles waarvan gezegd wordt, dat het *bestaat* [1]), meen ik aan het heerschende spraakgebruik geen geweld en aan den rijkdom in beteekenisschakeering van het woord *realiteit* niet te kort te doen. Alles komt immers neer op het begrip *bestaan* en dit heeft velerlei zin. Wie, de realiteit van zeker iets ontkennend, bijvoorbeeld daarvan zegt: „dat bestaat alleen in de verbeelding", stelt hiermede reeds minstens twee werkelijkheden: die, welke hij realiteit noemt, en de werkelijkheid eener wereld der verbeelding, waarin hij immers aan dat iets een bestaan toekent.

Treffende gedachten over het realiteitsbegrip kan men vinden in de op den zestienden verjaardag dezer Universiteit door wijlen *J. Woltjer* uitgesproken rectorale oratie „Ideëel en Reëel" [2]. *Woltjer* betoogt breedvoerig, dat realiteit bezitten, niet alleen, wat wij stoffelijke dingen noemen, maar ook de onstoffelijke; dat realiteit bezitten ook de eigenschappen der dingen [3]) en wel, omdat ze met dezelfde noodzakelijkheid bestaan, in dat opzicht evenzeer als die dingen zelf [4]); dat realiteit bezit, niet alleen de geest, maar ook de gedachte; hij stelt in het licht, dat er velerlei realiteit, velerlei *zijn, een maat van realiteit, een maat van zijn is*; laat zien, dat een ding tegelijk iets en niets kan zijn, naar de relatie, waarin het wordt opgevat [5]) en concludeert, dat alles neerkomt op de vraag: „in welke verhouding staan de verschillende realiteiten tot elkaar?" [6]).

Het is duidelijk, dat men in geen tak van wetenschap aan deze vraag ontkomt. En wanneer iemand van de objecten zijner wetenschappelijke onderzoekingen zegt, dat deze bestaan, zal hij zich rekenschap moeten geven van den zin zijner woorden. Bij beperking tot eigen speciaal terrein, kan hij volstaan met daar geldende *immanente* realiteitskriteria, maar zoodra hij zijne resultaten wil zien in breeder verband, of wil toepassen op andere terreinen, kan hij ook de vraag naar de *transiente* realiteit, die aan zijn objecten toekomt, niet ontwijken [7]).

Dit alles geldt ook in de wiskunde.

Geroepen om hedenmiddag tot U te spreken over een onderwerp, dit studievak betreffend, vraag ik korten tijd Uw aandacht voor eenige beschouwingen, die met de aangeroerde vragen in het nauwste verband staan, en die ik wil samenvatten onder den titel: „Existentiebewijzen in de Wiskunde".

Het zal U niet zijn ontgaan, dat buiten de wiskunde, ook daar waar de strengheid harer methoden bewondering afdwingt, de realiteit harer objecten een, naar verhouding, minder gevestigde reputatie geniet, waartoe overigens een ietwat misleidende terminologie aanleiding kan geven: mocht aan een beoefenaar der wiskunde nog niet zijn voorgeworpen, dat hij werkt met onbestaanbare getallen, doende alsof ze bestonden, dan heeft hem toch wel eens het verwijt getroffen, dat hij spreekt van imaginaire getallen, doende alsof zijn gewone getallen niet denkbeeldig waren.

Nu moet onmiddellijk worden toegegeven, dat de objecten, waarmede de wiskundige werkt, in de natuur, althans in onze zinnelijke wereld niet voorkomen: een punt of een lijn heeft niemand ooit waargenomen, misschien wel een kleine stip of een dunne streep, die echter onder het vergrootglas onmiddellijk hun waren aard van vlek of strook zullen verraden. De meetkundige figuren, al kunnen ze dan naar aanleiding van de ervaring worden gedacht, zijn niettemin gedachtendingen. En al ontmoeten we de telbaarheid als relatie tusschen de dingen der ervaringswereld, ook het getal als zoodanig treffen we daar niet aan.

Na de inleiding van zooeven, acht ik het niet noodig te betoogen, dat dit echter allerminst een reden is, waarom men aan de mathematische objecten realiteit zou moeten ontzeggen, hun bestaan zou moeten loochenen. De wiskundigen zijn in het algemeen daartoe ook niet geneigd, al zullen zij daarom het niet allen in alles eens zijn met den mathematicus *Cayley*, die, kennelijk zijn beeld aan *Plato* ontleenend, uitspreekt: „Ik voor mij zou zeggen, dat die puur denkbeeldige objecten de eenige realiteiten zijn, ten aanzien waarvan de correspondeerende physische objecten zijn als de schaduwen in de grot". [8]).

Vraagt men aan een wiskundige of de derdemachtswortel uit 8 bestaat, dan wel, of er een vierkant bestaat met dezelfde oppervlakte als een gegeven cirkel, dan krijgt men ongetwijfeld een bevestigend antwoord. De fraaie eenstemmigheid der mathematici, die hier aan den dag treedt, wordt pas verbroken, wanneer men, peilend naar de preciese bedoeling van het antwoord, dit min of meer aan de vaktechnische sfeer van reken- en meetkunde onttrekt. Zoo lang iets dergelijks echter niet geschiedt, blijkt, dat de wiskundigen elkaar zeer wel verstaan; ja meer: de eenstemmigheid in de wiskunde is niet slechts een uiterlijke.

Wanneer voor een willekeurigen mathematicus het bestaan van door zekere eigenschappen aangeduide (beweerde) getallen, figuren, functies of welke wiskundige objecten dan ook, niet onmiddellijk even evident is als dat van den derdemachtswortel uit 8 of van het bedoelde vierkant, eischt hij een *existentiebewijs*, dat wil zeggen een wiskundige bewijsvoering, die hem zekerheid moet verschaffen ten aanzien van het vooralsnog door hem betwijfelde bestaan en wel een zelfde zekerheid, als die hij bezit aangaande het bestaan van genoemden wortel en genoemd vierkant. Over de noodzakelijkheid van dergelijke existentiebewijzen zijn de wiskundigen het in de meeste gevallen wel eens, niet steeds over hun deugdelijkheid: de een is, om zoo te zeggen, spoediger overtuigd dan de ander. Het verschil in opvatting der mathematici aangaande het woord bestaan, werkt door, ook in de normen, die zij aan een goed existentiebewijs meenen te moeten stellen. Maar daar nu een bewijs, dat aan de strengste der tot nog toe geformuleerde normen voldoet, door allen wordt aanvaard, en ook door hen, die ruimere normen reeds toereikend achten, toch om zijn bijzondere strengheid wordt gewaardeerd, leek mij de opmerking, dat de eenstemmigheid niet slechts een uiterlijke is, niet overdreven.

Op grond dezer eenstemmigheid nu, acht ik het gerechtvaardigd, de opzettelijke bespreking van de vraag naar de verschillende opvattingen der mathematici betreffende het begrip bestaan, voorloopig te laten rusten.

Het is mijn bedoeling, om, uitgaande van een oeroud vraagstuk, het zoogenaamde isoperimetrische probleem, allereerst in een concreet geval de noodzakelijkheid van een existentiebewijs in het licht te stellen. Eenige merkwaardige kwesties, die met genoemd vraag stuk samenhangen, geven op natuurlijke wijze aanleiding tot verschillende beschouwingen over wiskundige existentiebewijzen in het algemeen, ter toelichting waarvan verscheidene zulke bewijzen ter sprake zullen worden gebracht.

Dat we overigens bij deze beschouwingen vanzelve stuiten op de zooeven door mij bedoelde fundamenteele verschillen in opvatting, zal geen betoog behoeven.

Het isoperimetrische probleem dan luidt: *Welke figuur heeft onder alle vlakke figuren van gelijken gegeven omtrek de grootst mogelijke oppervlakte?*

Wie de vraag zoo stelt, geeft door haar vorm reeds de meening te kennen, *dat er onder de vlakke gesloten figuren van gelijken omtrek inderdaad een zal bestaan met de eigenschap, dat haar oppervlakte minstens zoo groot is als die van elk der andere.*

Dit laatste nu is een *existentie-uitspraak,* die zeker nader bewijs behoeft, al aanvaardde de beroemde geometer *Jakob Steiner* haar uitdrukkelijk als vanzelfsprekend [9]). Niets echter dwingt ons, hem hier te volgen. Dat men voorzichtig moet zijn, leert bijvoorbeeld reeds de vraag naar het grootste onder alle vierkanten met oppervlakte kleiner dan een gegeven vierkant; zulk een vierkant bestaat immers niet [10]).

Indien men een minder triviaal voorbeeld ter waarschuwing wenscht, noem ik het probleem, dat *Besicovitch* [11]), naar aanleiding van een verhandeling van *Kakeya* [12]) tot oplossing heeft gebracht:

Op zee drijft een schip van gegeven lengte (bijvoorbeeld 40 meter), waarvan men de overige afmetingen mag verwaarloozen, zoodat bij rechtlijnige vaart, het door het schip beschreven wateroppervlak gelijk nul is. Dit schip moet 360°, dus een heelen slag worden gedraaid. Wat is nu het kleinst mogelijke wateroppervlak, dat daartoe benoodigd is?

Het antwoord, dat *Besicovitch* vond, is verrassend: een kleinste benoodigde wateroppervlakte *bestaat niet;* men zou kunnen zeggen, dat ze practisch gesproken gelijk nul is. Precieser: denkt men zich een zeer klein deel van een vierkanten millimeter (bijvoorbeeld een duizendsten vierkanten millimeter), dan is het mogelijk, het schip bij zijn draaiïng zulke bewegingen te laten maken, dat de totale oppervlakte van het beschreven water kleiner is, dan het van te voren in gedachten genomen deel van den vierkanten millimeter (in casu dan een duizendste vierkante millimeter).

Terloops zij opgemerkt, dat de manoeuvres volgens het systeem van *Besicovitch* voor de marine weinig beteekenis hebben, daar de cirkel, waarbinnen zij nog plaats kunnen vinden, noodzakelijk zeer groot wordt, indien de van te voren opgegeven bovengrens voor het totaal der te beschrijven wateroppervlakte zeer klein is [13]), zoodat het schip al te ver buiten de territoriale wateren zou komen: de baan die het beschrijft is namelijk, ruw gesproken, een ster met vele lange spitse punten. De figuur is dus geenszins *convex* (d.i. zonder instulpingen). Vraagt men naar de kleinste *convexe* figuur, waarbinnen de draaiïng van het schip plaats kan vinden, dan luidt het antwoord, dat deze *wel bestaat:* het is de gelijkzijdige driehoek met hoogte 40 meter. Dat is een stelling door *Fujiwara* vermoed, en bewezen door *Pál* [14]).

Keeren wij tot het isoperimetrische probleem terug. Het zal U thans duidelijk zijn, waarom de vraag naar een bewijs voor *Steiners* existentie-bewering niet overdreven is.

Nu is zijn bewering inderdaad juist; de oplossing van het isoperimetrische probleem (die overigens reeds den Grieken in den tijd vóór *Aristoteles* schijnt bekend te zijn geweest) [15]), luidt, *dat onder alle vlakke figuren met gelijken gegeven omtrek, de cirkel de grootste oppervlakte bezit.*

Deze fraaie stelling, waarvoor *Steiner* een vijftal bewijzen publiceerde, houdt dus heel wat meer in, dan zijn zooeven geciteerde bewering, die een „bloote" („zuivere", „reine") existentie-uitspraak is, terwijl daarentegen in de stelling de kromme met de in het geding zijnde maximum-eigenschap met name genoemd wordt.

Het merkwaardige, maar tevens het bedenkelijke is echter, dat bij al *Steiners* bewijzen der stelling, zijn zooeven gekritiseerde onbewezen existentie-bewering uitdrukkelijk vooropgesteld wordt, en in die bewijzen een essentieele rol speelt. Is dus de bewering onjuist, dan vallen ook *Steiners* bewijzen.

Iets dergelijks komt in de wiskunde meer voor, bijvoorbeeld in de theorie der differentiaalvergelijkingen. Nemen wij aan, dat zij een oplossing bezitten, dan kunnen wij uit sommige differentiaalvergelijkingen gemakkelijk allerlei eigenschappen dier oplossing afleiden. Het gaat er maar om, de existentie aan te toonen [16]).

Nu is er in de wiskunde veel gestreden over de vraag, of „zuivere" existentie-bewijzen mogelijk zijn, dat zijn zulke, die niet tevens de middelen bevatten om de grootheid, figuur of welk wiskundig object dan ook, waarvan de existentie wordt aangetoond, zelve aan te wijzen, te construeeren [17]).

Degenen, die deze vraag ontkennend beantwoorden, staan dus op het standpunt, dat ieder existentiebewijs óf ondeugdelijk is óf

„constructief", althans vatbaar voor een „constructieve" formuleering.

Ik zal hierop nog terug moeten komen, doch merk op, dat, als dit standpunt juist is in dien zin, dat ieder streng bewijs van *Steiners* existentie-bewering reeds in zou houden, dat de kromme met maximale oppervlakte de *cirkel* is, dit voor *Steiners* bewijzen der zooeven geciteerde stelling de merkwaardige consequentie meebrengt, dat ze geheel overbodig worden. Tot dezelfde sombere gevolgtrekking moet hij komen, die, terecht toegevend, dat *Steiner* streng heeft bewezen: *als een figuur met maximale oppervlakte bestaat, is dit de cirkel,* daarna opmerkt, dat men nu nog slechts het bewijs moet aanvullen door aan te toonen, dat de cirkel ook inderdaad het grootst is. Immers, hier kan bezwaarlijk nog van „aanvullen" worden gesproken; het is niets meer of minder, dan het volledige bewijs der stelling zelve, dat hier nog eens wordt geëischt.

Toch moet worden opgemerkt, dat bewijzen als die van *Steiner,* met het oog op het al of niet existeeren der objecten in kwestie, tweeërlei nut hebben: ten eerste spelen zij de rol van een oriënteerende analyse (*Steiner* wijst immers aan, dat geen andere dan de cirkel de gevraagde figuur kan zijn) en ten tweede kan het mogelijk zijn, dat de bewijzen zelve waardevolle bouwstoffen voor een compleet bewijs bevatten (dit bleek in het geval van *Steiner* zoo te zijn: *Edler* [18]) gaf een streng bewijs, gebaseerd op de grondgedachten van een der bewijzen van *Steiner*).

Op de bewijzen van *Steiner* zelve wil ik nog een moment ingaan, daar er een interessante kwestie aan verbonden is. Hun grondgedachte is de volgende: *Steiner* geeft een procédé aan, dat hem in staat stelt, *iedere* gesloten vlakke figuur, die geen cirkel is, zoo te vervormen, dat de omtrek gelijk blijft, doch de oppervlakte vergroot wordt. Hieruit volgt dus, dat een eventueele figuur met maximum oppervlakte geen andere dan de cirkel kan zijn. Neemt men nu met *Steiner* aan, dat er zoo'n figuur bestaat, dan is dit dus de cirkel, q.e.d.

Men kan nu probeeren het door *Steiner* aangegeven procédé ook op den cirkel toe te passen en zal dan vinden, dat dit procédé dien cirkel onveranderd laat. Dit feit is geheel in overeenstemming met het resultaat van *Steiner,* maar het is geenszins in staat de rol, die *Steiners* existentie-uitspraak in zijn bewijs speelt, overbodig te maken, zooals aan sommigen moeite kost om in te zien; zij redeneeren dan als volgt: alle figuren laten zich met het procédé van *Steiner* vergrooten, alleen de cirkel niet, dus moet de cirkel wel de grootste oppervlakte bezitten. De onjuistheid van deze conclusie kan worden toegelicht aan de hand van een instructief tegenvoorbeeld, dat mij door mondelinge overlevering bekend is [19]). Daarbij wordt een volkomen analoge redeneering toegepast op een ander geval, waar de uitkomst kennelijk fout is: We beschouwen de rij der natuurlijke getallen 1, 2, 3, ... Door quadrateeren krijgen we daaruit de getallen 1, 4, 9, ... Er is dus een procédé (het procédé van het quadrateeren), dat uit ieder natuurlijk getal een grooter voortbrengt, behalve uit het getal 1, dat gelijk blijft. Volgens de redeneering van zooeven zou dus 1 het grootste natuurlijke getal zijn, welke uitkomst kennelijk onjuist is. Maar hoe vreemd de uitkomst schijne, de getrokken conclusie zou inderdaad juist zijn, indien van te voren bewezen ware, dat een grootste natuurlijke getal bestaat.

Al is de lacune in *Steiners* bewijzen daarom niet minder ernstig, toch dient opgemerkt te worden, dat *Steiner* zich aan de laatstgeschetste grove logische fout niet heeft schuldig gemaakt, zooals men wel eens schijnt te meenen [20]); zijn fout is een te groot vertrouwen in wat zich op het eerste gezicht als evident en schijnbaar als aanschouwelijk voordoet.

Ik ben op het isoperimetrische probleem uitvoerig ingegaan, omdat bij dit probleem de situatie ook voor niet-wiskundigen begrijpelijk is, doch tevens om het feit, dat zich op geheel andere terreinen der wiskunde volkomen analoge kwesties hebben voorgedaan, met name bij een probleem, dat veel belangrijker is dan het isoperimetrische probleem, maar welks bespreking echter veel meer wiskundige voorkennis vereischt, zoodat ik daar met enkele aanduidingen zal volstaan. Ik bedoel het zoogenaamde eerste randwaardeprobleem der potentiaaltheorie, ook bekend als probleem van *Dirichlet* [21]). In zijn eenvoudigsten vorm luidt dat als volgt: Neemt men in het platte vlak een cirkel, en voegt men aan elk zijner randpunten een getalwaarde toe, zoodanig, dat daardoor op den cirkelomtrek een reëele, continue functie g wordt gedefiniëerd, dan wordt gevraagd, of er een functie f bestaat, die op de gesloten cirkelschijf continu is, op de open cirkelschijf aan de differentiaalvergelijking van *Laplace* voldoet en op den cirkelomtrek met g samenvalt [22]).

Nu werd deze vraag reeds omstreeks 1820 door *Poisson* [23]) bevestigend beantwoord en de zoogenaamde integraal van *Poisson* geeft de gevraagde functie daadwerkelijk aan [24]). Moeilijker wordt het probleem echter, wanneer men inplaats van den cirkel een ander gebied kiest, dat min of meer grillig van vorm kan zijn en dan de analoge vraag stelt; *Gauss, Dirichlet* en *Thomson* hebben zulke gevallen met behulp der variatierekening onderzocht [25]).

Met een methode, door hem *principe van Dirichlet* en door de Engelschen *principe van Thomson* genoemd, bewees *Riemann* omstreeks 1857, onder zeer algemeene voorwaarden voor den aard der beschouwde gebieden, dat er één en slechts één functie f bestaat, die aan de gestelde eischen voldoet, en hij gaf verschillende generalisaties en toepassingen van zijne in de functietheorie en de mathematische physica fundamenteele stellingen [26]).

In zijn bewijsmethode, die aan de redeneering van *Steiner* doet denken (*Riemann* past op zekere uitdrukking de variatierekening toe en ook *Steiner* „varieerde", zooals wij zagen, zijn krommen), schuilt echter een lacune, analoog aan die, welke zooeven werd besproken. Dit werd omstreeks 1860 opgemerkt door *Weierstrass* [27]).

De existentiestellingen van *Riemann* met hun vèrstrekkende toepassingen stonden daardoor op losse schroeven en het principe van *Dirichlet* raakte in discrediet. Ook die mathematici, die aan de juistheid der stellingen bleven gelooven, gaven de ontoereikendheid van *Riemanns* bewijs toe [28]). Onder de physici nam men een ander standpunt in, getuige een opmerking van *Helmholtz* [29]): „Für uns Physiker bleibt das Dirichletsche Prinzip ein Beweis", waarbij *Felix Klein* fijntjes aanteekent, dat *Helmholtz* blijkbaar onderscheidde tusschen bewijzen voor mathematici en zulke voor physici [30]).

Nu kan inderdaad physische aanschouwing bij wiskundige existentieproblemen een belangrijke rol spelen. Ziet men bijvoorbeeld op grond van natuurkundige wetten in, dat de overigens misschien niet nader bekende functie, welke bij een of andere beweging de plaatsverandering van een stoffelijk punt met den tijd aanduidt, aan een zekere differentiaalvergelijking gehoorzaamt, dan is het op physisch standpunt duidelijk, dat er een oplossing van die differentiaalvergelijking bestaat. De mathematicus zal dit wel is waar aanvaarden als een vingerwijzing, niet als een existentiebewijs. Zelfs als hij, aannemend dat er een oplossing bestaat, een functie kan opstellen, die deze oplossing moet voorstellen, dient hij nog te controleeren, of de functie inderdaad aan de differentiaalvergelijking voldoet.

De existentiestellingen van *Riemann* werden omstreeks 1870 voor een belangrijk deel gered door *Schwarz* [31]), een leerling van *Weierstrass*, maar daartoe moest deze omzien naar geheel andere wegen; het gelukte hem met zijn zoogenaamde *alterneerende methode:* Voor den cirkel was, zooals we zagen, het randwaardeprobleem opgelost; door nu anders gevormde gebieden dakpansgewijze stapje voor stapje met cirkels te overdekken, gelukte het *Schwarz* het probleem ook voor zulke gebieden op te lossen [32]). Later verschenen nog vele andere oplossingsmethoden (o.a. van *Neumann* en van *Poincaré*), waarop ik niet wil ingaan [33]), doch pas omstreeks 1900 gelukte het, en wel aan *Hilbert*, om de grondgedachten van het sinds de kritiek van *Weierstrass* verworpen principe van *Dirichlet* in eere te herstellen, door ze te gebruiken tot den opbouw van een streng bewijs [34]).

De *alterneerende methode* van *Schwarz* vertoont in opzet eenige gelijkenis met de zoogenaamde methode der *successieve approximaties*, die, sinds *Picard* zulk een gewichtige rol in de theorie der differentiaalvergelijkingen speelt [35]), en de grondgedachte van beide methoden vindt men reeds in een oud procédé der algebra: de *regula* *falsi*: om een hoogeremachtsvergelijking [36]) bij benadering op te lossen, kiest men een getal, waarvan men vermoedt, dat het niet al veel van den verwachten wortel verschilt. Het procédé stelt nu in staat, uit dit getal een ander getal af te leiden, dat zeker minder van dezen wortel verschilt en deze bewerking kan men, zoo vaak men wil, herhalen.

Zulk een methode van achtereenvolgende benaderingen nu kan leiden tot een existentiebewijs, indien ten eerste kan worden bewezen, dat het procédé convergeert en ten tweede, dat het object, waarvan op grond der convergentie de existentie vaststaat, inderdaad aan de eischen voldoet.

Gelukt dit, dan heeft men blijkbaar een *constructief* existentiebewijs. Het nut der constructiviteit is duidelijk: behalve, dat de existentie gewaarborgd is, heeft men het gevraagde object zelf!

Er zijn echter gevallen in de wiskunde bekend, waarbij het van te voren afzien van den eisch der constructiviteit een existentiebewijs pas mogelijk heeft gemaakt; ook kan het afzien van dien eisch het voordeel medebrengen van een grootere algemeenheid in beschouwingen en resultaten.

Om een voorbeeld te noemen: men kan met behulp van de theorie der kettingbreuken bij ieder irrationaal getal een rij van (rationale) breuken construeeren, die dit irrationale getal met zekere voorgeschreven nauwkeurigheid benaderen [37]). Indien men echter een aantal (bijvoorbeeld *tien*) van zulke irrationale getallen gelijktijdig wil benaderen met stelsels gelijknamige breuken (in ons voorbeeld zal dan ieder stelsel *tien* zulke breuken bevatten), staat een dergelijke geperfectionneerde constructieve methode als die der kettingbreuken niet ten dienste [38]). Toch kan men de existentie van de bedoelde benaderingen aantoonen door gebruik te maken van de zoogenaamde *ladenmethode* van *Dirichlet* [39]).

Dirichlet heeft haar, behalve voor deze benaderingen, o.a. met vrucht toegepast bij zijn bewijs [40]) der existentie van oneindig vele eenheden, die niet tevens eenheidswortels zijn, in ieder algebraisch getallenlichaam van den graad $n > 2$. Vóór hem, toen alle bewijspogingen er op waren gericht, zulke eenheden ook werkelijk aan te wijzen, kon men slechts in een enkel geval, n.l. bij reëele quadratische getallenlichamen, tot dit resultaat komen.

Sinds *Dirichlet* speelt de ladenmethode in vele gebieden der wiskunde een gewichtige rol.

Ik denk slechts aan de diepe stellingen van *Thue* en *Siegel* over de benadering van algebraische getallen [41]), aan de onderzoekingen van *Khintchine* op het gebied der lineaire Diophantische Approximaties [42]) en aan het feit, dat in de verhandelingen van *Mordell* en *Van der Corput* het fundamenteele theorema, waarop de geheele Geometrie der Getallen van *Minkowski* berust, in gegeneraliseerden vorm, als een eenvoudige toepassing der ladenmethode wordt afgeleid [43].

De grondgedachte der ladenmethode is overigens eenvoudig genoeg: *wanneer meer dan n voorwerpen over n laatjes (vakjes) verdeeld zijn, bevat minsten één dier laatjes (vakjes) tenminste twee der voorwerpen.*

Dit is alles.

Om U de werking van dit principe te verduidelijken, zal ik met zijn behulp aantoonen, dat minstens één tweetal inwoners van Amsterdam bestaat met onderling gelijk aantal hoofdharen. Een beroep doend op bekende gegevens [44], vindt men, dat het grootste aantal haren, op een menschenhoofd ooit geteld, zeker minder dan 150.000 bedraagt. We zullen dus vrij veilig gaan, als we aannemen, dat het maximum aantal minder dan 750.000 bedraagt. We kunnen de inwoners van Amsterdam dus verdeeld denken in ten hoogste 750.000 categorieën, naar het getal hunner haren. Daar het aantal Amsterdammers echter meer dan 750.000 bedraagt, verzekert de ladenmethode de existentie van minstens één tweetal hunner, die in dezelfde categorie voorkomen [45].

Een ander voorbeeld van een niet-constructief existentiebewijs, niet minder gewichtig dan het genoemde van *Dirichlet*, levert het klassieke bewijs van *Hilbert*, dat bij ieder vormensysteem een eindig invariantensysteem bestaat, waarin zich alle andere geheele rationale invarianten van het vormensysteem geheel rationaal laten uitdrukken. Ook hier hadden de constructieve pogingen, o.a. van *Gordan*, gefaald [46].

We zullen echter op dit bewijs van *Hilbert* niet verder ingaan, doch liever eenige oogenblikken verwijlen bij eenige existentiebewijzen uit de getallentheorie.

Om de existentie van zekere getalsoorten aan te toonen, neemt men vaak de toevlucht tot de leer der verzamelingen. Reeds haar ontdekker *Cantor* bewees met haar hulp de existentie van *transcendente* getallen, waarvan trouwens het bestaan door *Liouville* reeds was bewezen [47]: *transcendent* heet ieder getal, dat niet *algebraisch* is, *algebraisch* heet een getal als het de wortel is van een of andere hoogeremachtsvergelijking, waarvan de coëfficienten *geheele* getallen zijn [48].

Cantor liet ten eerste zien, dat alle reëele algebraische getallen zich in een genummerde rij laten ordenen [49]. En ten tweede, dat dit met de verzameling der reëele getallen niet het geval is; precieser: dat bij iedere genummerde rij van reëele getallen, een reëel getal bestaat, dat in de rij niet voorkomt [50]. Hieruit volgt dus de existentie van transcendente getallen.

In deze gedaante voorgedragen [51], is het bewijs niet constructief, maar het laat zich gemakkelijk in een constructieven vorm gieten. Het is namelijk mogelijk de reëele algebraische getallen zoodanig te nummeren, dat men bij iedere $n \geq 1$ in een eindig aantal stappen n cijfers achter de komma kan bepalen in de decimale ontwikkeling van het n-de getal dier rij. De diagonaalmethode van *Cantor* levert dan een transcendent getal, waarvan men in een eindig aantal stappen ieder gewenscht aantal decimalen kan berekenen, ja levert zelfs oneindig vele zulke transcendente getallen [52].

Wat men tegen de methode kan aanvoeren is dus niet, dat ze niet constructief is, maar wel, dat de transcendente getallen, niet in een gesloten vorm geleverd worden; dat zich verder niets over deze getallen laat uitspreken (zulks in tegenstelling met bijvoorbeeld de methode van *Liouville*); dat het bewijs geen middelen geeft om uit te maken of bepaalde bekende getallen, zooals bijvoorbeeld e of π, tot de transcendente behooren of niet [53].

Men denke zich nu, in analogie met het voorgaande, het geval, dat iemand een stelling heeft bewezen van het volgende type: „De reëele getallen, met uitzondering van oneindig vele, die zich echter in een genummerde rij R laten ordenen, hebben de eigenschap E" (waar E een eigenschap beteekent, die in de stelling nader is omschreven en waarvoor het zinvol is van een reëel getal te vragen, of dit die eigenschap bezit of niet), terwijl het hem echter onmogelijk is, om op grond van zijn bewijs iets naders over de getallen van R mede te deelen. In dit geval ligt de zaak anders dan zooeven. Nu toch kan de constructie van een reëel getal, dat de eigenschap E bezit, met behulp der diagonaalmethode, niet daadwerkelijk worden uitgevoerd en is de tegenwerping, dat het bewijs niet constructief is, gerechtvaardigd [54].

In een soortgelijk, maar gecompliceerder geval verkeert men bij de zoogenaamde *metrische* onderzoekingen, die een belangrijke rol spelen, vooral met betrekking tot de getallentheoretische eigenschappen van het continuum. Deze onderzoekingen berusten op de maattheorie van *Borel* en *Lebesgue* [55].

Wanneer men op een rechte lijn een nulpunt O aanwijst en een lengte-eenheid kiest, duidt ieder punt P der rechte een getal aan (n.l. het getal, dat de afstand O P aangeeft) en omgekeerd ieder getal, een punt der rechte.

Ik beschouw thans 2 punten, A en B, en noem de verzameling der tusschen A en B liggende punten, het vak (A, B); aan dit vak ken ik als *„maat"* toe zijn lengte. Ook een geïsoleerd liggend punt vatten we op als een vak en wel met de maat nul. Een willekeurige, misschien zeer grillig verspreid liggende puntverzameling op onze rechte trachten we nu te meten met behulp van vakken. Hoe dit volgens de theorie van *Borel-Lebesgue* geschiedt, kan hier niet worden beschreven. Ik volsta met de mededeeling, dat de klasse der volgens deze theorie meetbare verzamelingen, zeer uitgebreid is, en vermeld slechts de volgende stelling: Splitst men van een meetbare verzameling een meetbaar deel af, dan is ook het overblijvende deel meetbaar; en de maat der verzameling is gelijk aan de som van de maten dier deelen.

Ons interesseeren hier hoofdzakelijk *verzamelingen van de maat nul,* een begrip, dat ik hier streng kan definiëeren: een puntverzameling heet van de maat nul, indien het mogelijk is, bij iedere nog zoo klein gekozen positieve lengte *d*, een eindige of oneindige rij van vakken aan te wijzen, die de puntverzameling overdekken en wier gezamenlijke lengte kleiner is dan *d*.

Ligt nu in een vak V een verzameling W van de maat nul, dan heeft het resteerende deel V′ van het vak V blijkbaar dezelfde maat als het vak V zelve. Men drukt dit ook uit door de nuttig gebleken spreekwijze, dat *bijna alle punten (getallen)* van V tot dat resteerende deel V′ behooren; *bijna alle* beteekent per definitie: *alle met uitzondering van een verzameling van de maat nul* (die eventueel leeg kan zijn).

Merkwaardig is nu de zoogenaamde *nul-of-één-wet,* die onder anderen geldt voor alle *homogene* verzamelingen. De verzameling W heet in ons vak V homogeen, als in ieder deelvak van V, de maat van dat deel der verzameling, dat in dat deelvak ligt, steeds dezelfde fractie is van de maat van dat deelvak, waar en hoe klein dit laatste ook wordt gekozen. Deze fractie nu noemt men de *dichtheid* van W in V. Nu zegt de nul-of-één-wet: *de dichtheid eener in V homogene verzameling is nul of één* [56]. Anders: tot een in V homogene verzameling behooren bijna alle, of „bijna geene" punten (getallen) van V.

Opmerkelijk is nu, dat zeer vele verzamelingen, die ons in de getallenleer interesseeren, homogeen zijn; vele stellingen in de metrische getallenleer beginnen dan ook: „Bijna alle getallen......"

Een interessant voorbeeld bieden de onderzoekingen van *Borel* over de zoogenaamde *normale* getallen [57].

Beschouwt men de ontwikkeling in een tiendeelige breuk van het getal $^1/_3$, dan merkt men, dat deze repeteert. Van bekende *irrationale* getallen, als $\sqrt{2}$, e, π weet men alleen, dat hun decimale breuk niet repeteert, maar verder is over het gedrag der decimalen vrijwel niets te zeggen [58]. Men weet bijv. niet, of in de decimale ontwikkeling van π het cijfer 7 relatief vaker voorkomt dan de andere cijfers.

Borel noemt nu een getal *normaal,* indien in zijn tiendeelige ontwikkeling alle cijfers relatief even vaak voorkomen, precieser: deelt men het aantal der zevens onder de eerste *n* decimalen door *n,* dan zal men bij een *normaal* getal een breuk verkrijgen, die bij onbegrensd aangroeiende *n* tot $^1/_{10}$ nadert; en wat hier van het cijfer 7 gezegd is, geldt ook voor de andere 9 cijfers.

Nu schuilt in de keuze van 10 als grondtal der ontwikkeling een zeer willekeurig element en het is de vraag, of een normaal getal bij ontwikkeling in een andertallig stelsel weer aanspraak mag maken op den naam normaal (dit begrip analoog gedefiniëerd als zooeven).

Borel noemt een getal *absoluut normaal*, indien het voor *iedere* geheel $q \geq 2$ normaal is met betrekking tot zijn ontwikkeling in het q-tallig stelsel.

Hij toont aan, dat deze adjectieven gerechtvaardigd zijn: *Bijna alle reëele getallen zijn absoluut normaal* [59]).

Het ligt in den aard van een absoluut normaal getal, dat bij ontwikkeling in een q-tallig stelsel ($q \geq 2$) iedere van te voren opgegeven combinatie (waaronder herhalingen mogen voorkomen) van een willekeurig groot aantal achter elkaar geplaatste der cijfers $0, 1, \ldots, (q-1)$ oneindig dikwijls in de decimale ontwikkeling zal optreden en wel relatief even vaak als iedere andere combinatie met hetzelfde aantal cijfers.

Deze laatste eigenschap nu kan men, in navolging van *Borel*, op een treffende manier inkleeden [60]): als men een willekeurig absoluut normaal getal (dat wil dus zeggen: *bijna ieder getal*) ontwikkelt (bijvoorbeeld) in het 150-tallig stelsel en voor de 140 symbolen, die naast de 10 cijfers 0, 1, 2, ..., 9 nog ter beschikking moeten staan, de letters kiest uit ons alphabeth en het Grieksche, benevens de hoofdletters en verder leesteekens als: punt, vraagteeken, spatie en andere symbolen naar behoefte, zullen in die ontwikkeling, tusschen veel zonder zin, alle geschriften der wereldliteratuur, zoowel *Homerus* als de complete werken van *Victor Hugo*, zoowel het weerbericht van vijftig jaar geleden, als de volledige tekst aller in de toekomst nog vast te stellen geheime verdragen oneindig dikwijls de revue passeeren.

De stelling van *Borel* kan worden opgevat als een zeer speciaal geval van de resultaten van latere onderzoekingen door *Hardy-Littlewood, Weyl* en anderen over de gelijkmatige verdeeling modulo 1 van reëele getallenrijen [61]).

Wij denken ons om te beginnen een willekeurig gekozen oneindig voortloopende decimale breuk achtereenvolgens vermenigvuldigd met $10, 10^2 = 100, 10^3 = 1000, \ldots$; we kunnen dit bereiken door de komma steeds opnieuw één plaats naar rechts op te schuiven. Vervangen we daarbij nu telkens het getal voor de komma door nul, dan verkrijgen we op deze wijze een rij van getallen, die alle tot het vak $(0, 1)$ behooren. Is de decimale breuk, waarvan we uitgingen, een absoluut normaal getal, dan kan men op grond van het voorgaande inzien, dat de getallen der bedoelde rij alle verschillend zijn en zich buitengewoon regelmatig over het vak $(0, 1)$ verdeelen.

Men heeft zoo de stelling: *voor bijna ieder reëel getal a liggen de gebroken deelen van de getallen der rij*

$$a, 10a, 100a, 1000a, \ldots\ldots$$

gelijkmatig verdeeld over het vak (0, 1).

Het ligt nu voor de hand te vragen, of deze stelling ook geldt, als men de rij

$$a, 10a, 100a, 1000a, \ldots\ldots$$

vervangt door een willekeurige rij van de gedaante,

$$n\,a, n'\,a, n''\,a, \ldots\ldots,$$

waarin

$$n, n', n'', \ldots\ldots,$$

een rij van opklimmende geheele getallen voorstelt. *Weyl* [62]) bewees, dat dit inderdaad zoo is. De methode van *Weyl* laat velerlei uitbreiding toe op rijen van andere gedaanten en zoo kan men bijvoorbeeld aantoonen [63]), dat voor bijna ieder getal $a > 1$, de gebroken deelen van de getallen der rij $a, a^2, a^3, \ldots$ gelijkmatig verdeeld liggen over het vak (0, 1).

Ook in andere gebieden der getallenleer vindt men zulke metrische stellingen. Ik herinner aan de metrische kettingbreuktheorie, waarin reeds, zij het in de terminologie der waarschijnlijkheidsrekening [64]), *Gauss* [65]) de eerste resultaten vond. Aan de belangrijke stellingen van *Khintchine* en *Jarnik* over lineaire Diophantische approximaties [66]) en van *Mahler* over de maat der verzameling aller door hem aldus genoemde S-getallen [67]).

Men kan door een invoering van een fijner maatbegrip, bijvoorbeeld volgens de methode van *Hausdorff* [68]), de verzamelingen van de maat nul nog verder onderscheiden. *Jarnik* gebruikte dit voor het onderzoek der simultane approximatie van reëele getallensystemen met gelijknamige breukenstelsels [69]).

Een dergelijke, fijnere metriek heeft bijvoorbeeld haar nut als men de existentie van bepaalde soorten van getallen wil aantoonen, terwijl men van te voren weet, dat deze getallen, zoo ze al bestaan, een verzameling vormen van de maat nul in den zin van *Lebesgue*.

De metrische stellingen zijn *existentiestellingen*. Ze spreken de existentie uit zelfs van oneindig vele getallen, die zekere, in de betreffende stelling met name genoemde eigenschappen bezitten; in de meeste gevallen is men echter niet in staat, ook maar één dier getallen op grond van het bewijs werkelijk aan te geven [70]). En in versterkte mate gelden hier dezelfde bezwaren, die ik met betrekking tot het zooeven geschetste bewijs van *Cantor* noemde.

Weyl merkt ergens op [71]), dat men de waarde der metrische stellingen niet hoog mag aanslaan. Dit oordeel moge gemotiveerd zijn, indien men zich op den allerscherpsten eisch van constructiviteit instelt, toch laat zich zelfs op dit standpunt nog menig argument in het voordeel der metrische onderzoekingen aanvoeren. Deze toch leeren ons om zoo te zeggen, het gemiddelde gedrag der reëele getallen kennen. Problemen, waarvan men bij één enkel gegeven getal niet zou weten, hoe men ze zou moeten aanvatten, laten zich metrisch soms zeer eenvoudig behandelen. Zoo kent de wiskunde bijvoorbeeld nog geen middel om iets niet-triviaals vast te stellen over de verdeeling der breukdeelen van de getallen der rij e, e^2, e^3, ... over het vak (0, 1), terwijl zich verschillende metrische stellingen over de breukdeelen der getallen van de rij a, a^2, a^3, ... laten bewijzen [72].

Behalve, dat dus een metrische stelling daar, waar men langs andere wegen *niets* kan bereiken, in ieder geval *iets* is, levert ze een vingerwijzing [73] in de richting van het resultaat, dat men in een niet al te buitenissig geval ongeveer kan verwachten, wat de opgave, om langs constructieven weg een getal op te sporen, dat de in het geding zijnde eigenschap inderdaad bezit, of een getal, dat die eigenschap juist niet heeft, uitermate kan vergemakkelijken. Dit zien wij bijvoorbeeld met betrekking tot de bovengenoemde getallenrijen in het werk van *Pisot* en, voor zoover het de absoluut normale getallen aangaat, in dat van *Sierpinski* [74].

In het voorgaande is herhaaldelijk gesproken over *meetbare* verzamelingen en wel speciaal over die van de maat nul. De vraag rijst, of er ook *onmeetbare* verzamelingen bestaan, dus zulke, waaraan men op grond van de theorie van *Borel-Lebesgue* geen maat kan toekennen. Men heeft verschillende existentiebewijzen voor dergelijke verzamelingen, maar tegen hunne geldigheid zijn ernstige bezwaren in te brengen; de meeningen zijn hier verdeeld, in ieder geval zijn de bedoelde bewijzen niet constructief.

De theorie der verzamelingen heeft overigens van hare geboorte af stof gegeven tot soms heftige discussies ten aanzien van het existentie-probleem. Zoo heeft *Cantor* met mathematici, philosophen en theologen gestreden over de vraag of het oneindige actueel bestaat, dan wel of alleen van het potentieel-oneindige mag worden gesproken en later hebben o.a. de existentiebewijzen, gegrond op het zoogenaamde „Auswahlprinzip" van *Zermelo*, aanleiding gegeven tot levendige gedachtenwisselingen, die nog werden gekleurd door het feit, dat in de verzamelingenleer antinomieën werden ontdekt [75]. Wij zullen echter op de problemen der verzamelingenleer en hunne geschiedenis niet verder ingaan, doch liever overgaan tot eenige meer algemeene beschouwingen.

Nu in het voorgaande reeds eenige malen meeningsverschillen aangaande existentiebewijzen aan het licht traden, wordt het tijd, iets dieper in te gaan op de vraag naar het wezen van een wiskundig bewijs in het algemeen [76]. Ondanks de schakeering der meeningen is het niet geheel onmogelijk, ten dezen een vrij algemeen verbreide opvatting aan te wijzen, die men de „klassieke" kan noemen. Ze is kort geschetst deze: uitgaande van dat, wat reeds vast staat, worden nieuwe wiskundige waarheden gevonden langs den weg van logische redeneering, dat wil zeggen: met behulp van een gedachtenketen, die uit een eindig aantal schakels bestaat, waarvan ieder voldoet aan de algemeen als geldig erkende wetten van het logisch denken, die bijvoorbeeld voor een niet onbelangrijk deel zijn beschreven door *Aristoteles*. Dit sluit natuurlijk eenerzijds niet uit, dat die wiskundige waarheden langs inductieven weg ontdekt (beter misschien: vermoed) kunnen worden (*Riemann* liet zich eens ontvallen [77]): „Wenn ich nur erst die Sätze habe! Die Beweise werde ich schon finden"), noch anderzijds, dat men herhaalde logische redeneeringen kan vermijden door zuiver mechanisch, min of meer uitgebreide formeele systemen, waarvan de bruikbaarheid en de juistheid vroeger eens en vooral werd vastgesteld, toe te passen [78]).

Nu heb ik in het voorgaande met betrekking tot existentiebewijzen meermalen de termen *constructief* en *niet-constructief* gebruikt. Hierbij denkt men onwillekeurig terug aan de schooljaren, waarin men bij de vlakke meetkunde herhaaldelijk voor de opgave geplaatst werd, uit bepaalde gegevens, in een eindig aantal stappen, voorgeschreven figuren op te bouwen. De hulpmiddelen, die hierbij mochten worden gebruikt, waren de passer en de liniaal.

In den gedachtengang dier schoolmeetkunde is dan bijvoorbeeld het bij een gegeven lengte-eenheid bepalen van een lijnstuk ter lengte $\sqrt{2}$ op *constructieve* wijze mogelijk [79]), en dat van een vierkant met oppervlakte gelijk aan een gegeven cirkel *niet*. (Dit laatste werd aan het einde der vorige eeuw streng bewezen, waarmede toen pas het eeuwenoude probleem van de cirkelquadratuur had afgedaan [80])). Toch heb ik reeds opgemerkt, dat dit vierkant wel bestaat; als men andere constructiemiddelen toelaat, kan men het gemakkelijk teekenen.

Nu is het duidelijk, dat dit daadwerkelijk op papier of bord construeeren niet het eigenlijke wiskundige bedrijf is: het is slechts een handtastelijke begeleiding van het bouwen, het construeeren, dat wij in onze gedachten, in onzen geest verrichten; wij hebben dit allen ervaren bij de stereometrie, waar we de constructies wel beschreven, maar meest niet uitvoerden, tenzij dan in de beschrijvende meetkunde, waar zij teruggebracht werden tot de planimetrie.

De meetkundige constructies werden door mij slechts aangehaald als een speciaal voorbeeld van *constructieve* wiskundige redeneegen in het algemeen. Zoo is bijvoorbeeld het bewijs van *Euclides* voor de *existentiestelling, dat er oneindig vele priemgetallen* (dit wil zeggen: ondeelbare natuurlijke getallen) *bestaan*, in den volsten zin constructief, hoewel het niets met de meetkunde uitstaande heeft. *Euclides* merkt op [81]), dat als $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n$ de eerste n priemgetallen voorstellen, het getal $p_1 p_2 \ldots p_n + 1$ door geen dier priemgetallen deelbaar is, zoodat het óf zelf een priemgetal is, óf een priemfactor bevat die grooter is dan p_n; in ieder geval kan men dus in een eindig aantal stappen een priemgetal aanwijzen, dat grooter is dan p_n .

Laat men in de wiskunde het principe van het uitgesloten derde toe, dan heeft men een mogelijke bron van *niet-constructieve* existentiebewijzen; voert de aanname van het *niet-bestaan* van zeker object tot een tegenspraak met reeds aanvaarde waarheden, dan volgt daaruit de existentie van dit object.

De omvang nu van de bij het wiskundige bewijs toe te laten hulpmiddelen (die bijvoorbeeld afhangt van de vraag, of men andere dan constructieve bewijzen zal toestaan), bepaalt voor een groot deel, wat men wiskunde noemt.

Dat hier geen eenstemmigheid heerscht, is reeds een gevolg van het feit, dat *„wiskunde"* een naam is, door menschen gegeven aan een door menschen afgegrensd gebied van menschelijke wetenschap. Om tot ons voorbeeld van de schoolmeetkunde terug te keeren : wanneer iemand *uitsluitend* de meetkunde van passer en liniaal tot *meetkunde* wil verklaren, valt het probleem van de cirkelquadratuur daarbuiten [82]).

Men voelt dus, dat hier willekeur mogelijk is, maar waar begrippen in het spel zijn als *existentie* en *waarheid*, is het duidelijk, dat deze willekeur niet door ieder als ongelimiteerd zal worden gevoeld.

Wij dienen verder te bedenken, dat de opvatting aangaande de existentie van zeker wiskundig object, behalve door de wijze, waarop die existentie is bewezen, ten sterkste wordt bepaald door de meening aangaande de realiteit van het deel der wiskunde, waarvan men bij het bewijs als vaststaand uitging. De meeningsverschillen, die men hier aantreft, loopen voor een deel parallel met de zooeven bedoelde. Wij zullen ze daarom in verband met deze bezien en wel, zij het vluchtig, in het licht der historische ontwikkeling.

Tot in de vorige eeuw was er geen voldoende reden, om niet de realiteit der wiskundige objecten in het nauwste verband te zien met de ervaringswerkelijkheid, hetzij dat men op *empiristisch* standpunt. deze objecten beschouwde als uit de ervaring door abstractie gewonnen, hetzij, dat men de eenvoudigste wiskundige waarheden hield voor aanschouwingsvormen *a priori* van onzen geest, aanschouwingsvormen, waarin alleen de wereld onzer ervaring door ons kan worden gevat en gekend.

Dit geldt niet alleen met betrekking tot de elementaire reken- en meetkunde, maar ook ten aanzien van de analytische meetkunde, die in de zeventiende eeuw ontdekt door *Fermat* en *Descartes*, beschouwd werd als een toepassing van rekenkunde en algebra op de meetkunde en evenzeer met het oog op de infinitesimaalrekening [83]), door *Newton* en *Leibniz* uitgevonden en verder ontwikkeld door mathematici als *Euler, Johann Bernoulli* en *Lagrange* [84]).

Ontbrak met name ten aanzien der infinitesimaalrekening niet de aarzeling over de vraag, of men hier wel op exacten grondslag stond [85]), de groote vruchtbaarheid der nieuwe principia deed den schroom overwinnen en gedreven door koene intuïtie drong men steeds verder door in het onbekende, in vele gevallen de bereikte resultaten door een succesvolle confrontatie met wat men op grond van meest meetkundige aanschouwelijkheid zag als feiten der ervaring, voldoende gerechtvaardigd achtende: waarom zou een vloeiende lijn niet in elk harer punten een raaklijn en een door een gesloten kromme begrensd deel van een plat vlak geen oppervlakte bezitten? Waarom zouden grootheden als $\sqrt{2}$ en π niet bestaan, als zij kennelijk de lengte uitdrukken van den diagonaal van het vierkant met zijde 1 en den halven omtrek van den cirkel met straal 1?

Terwijl men zoo de resultaten der analyse in het algemeen wel aanvaardde, groeide gestadig het wantrouwen tegen het apparaat zelve; in de handen van velen gaf het daartoe voldoenden grond: een onomlijnd limietbegrip en de vage voorstellingen omtrent zoogenaamde oneindig kleine grootheden gaven het een mysterieus karakter, waarvan in vele sceptische uitspraken wordt gewag gemaakt [86]) (en dat het overigens voor velen nog heden ten dage niet geheel heeft verloren).

Zoo spreekt *S. Carnot* van de infinitesimaalrekening als „Un calcul d' erreurs compensées" en reeds *Lagrange* uit zich weinig minder scherp; hij is overigens een der eersten, die de theorie een exacten grondslag wil geven door haar te grondvesten op de algebra [87]).

Het spreekt vanzelf, dat men op den duur het gebouw der analyse niet op wankelen grondslag kon blijven aanvaarden. De kritische herbouw harer fondamenten, onder de strenge leiding van wiskundigen als *Cauchy, Riemann, Weierstrass,* bracht aan het licht, dat van het bouwsel der vorige generatie niet alles kon worden behouden en vrijwel niets zonder corrigeerende toevoegingen [88]). Daarbij bleek bovenal de ontoereikendheid der aanschouwing; dat er bijvoorbeeld, zooals *Weierstrass* aantoonde, continue functies bestaan, welker grafische voorstellingen in geen enkel punt een raaklijn bezitten [89]), is toch wel een afdoende waarschuwing om niet op een figuur te vertrouwen.

In dien strengen herbouw der wiskunde werden ook de zoogenaamde *imaginaire* grootheden betrokken. Tegenover deze had men steeds wel zeer wantrouwend gestaan; immers van de imaginaire getallen wordt reeds in de eerste helft der zestiende eeuw gewag gemaakt [90]), terwijl ze pas in de laatste helft van de negentiende eeuw algemeene erkenning vonden. De oorzaak zal wel daarin liggen, dat hier alle directe aanschouwelijkheid ontbrak. De vergelijking

$x^2 = -1$ had nu eenmaal geen wortels; maar toch, als men op het zinlooze symbool $\sqrt{-1}$ met eenige voorzichtigheid de rekenregels der algebra toepaste, ging dit vlot en voerde het in sommige gevallen tot resultaten, die nog geheel konden worden geïnterpreteerd binnen het gebied der „vertrouwde" wiskunde, resultaten die men op andere wegen waarschijnlijk niet zou hebben gevonden. Men denke bijvoorbeeld aan het verband tusschen de exponentiaalfunctie en de goniometrische functies, uitgedrukt door de formule van *Euler* [91]).

Het bleef echter de vraag, of $\sqrt{-1}$ nu iets werkelijks was of niet, en het wantrouwen drukte zich uit in namen als „imaginair" en „onbestaanbaar"; *Leibniz* [92]) zeide in 1702: „Die imaginären Zahlen sind eine feine und wunderbare Zuflucht des Göttlichen Geistes, beinahe ein Amphibium zwischen Sein und Nichtsein", en nog omstreeks 1800 publiceerde de jonge *Gauss* [93]) de zoogenaamde hoofdstelling der klassieke algebra (het *existentietheorema*, dat uitspreekt: *Iedere hoogeremachtsvergelijking* [94]) *(met reëele coefficiënten) bezit minstens één wortel in het gebied der complexe getallen)* en zijn eerste bewijs dier stelling in een inkleeding, waarbij zorgvuldig het gebruik van het imaginaire vermeden is, hoewel deze stelling een der klemmendste argumenten voor de invoering der complexe getallen in de wiskunde voorstelt, en hoewel *Gauss* zelve reeds een helder inzicht in hunnen aard had, een inzicht, gegrond op de door hem in 1797 gevonden en later beroemd geworden meetkundige interpretatie [95]).

Bij het zoeken nu in de negentiende eeuw naar een hechten grondslag voor de wiskunde, kunnen wij in hoofdzaak twee tendenties onderscheiden, die elkaar echter niet behoeven uit te sluiten: *arithmetiseering* (dit is: herleiding tot eigenschappen van de natuurlijke getallen der rekenkunde) en *formaliseering*, maar die in den loop des tijds tot in uiterste consequentie doorgevoerd, ieder voor zich de kiem bleken van een der beide extreme opvattingen, waartusschen zich de meeningen over de grondslagen der wiskunde, ook over het bestaansbegrip in de wiskunde, bewegen: *intuïtionisme* en *axiomatisch formalisme*.

Beschouwen wij, in aard en ontwikkeling, arithmetiseering en formaliseering achtereenvolgens iets nader.

We nemen aan, dat de drie hoofdbewerkingen: optellen, aftrekken en vermenigvuldigen met de natuurlijke getallen 1, 2, 3, ... en het getal 0, ons bekend zijn; op welke gronden deze kennis berust, zij voorloopig buiten beschouwing gelaten. In het schoolonderwijs volgen dan de breuken. Wie zich tracht te herinneren, hoe hij de kennis der breuken heeft verworven, zal bezwaarlijk kunnen ontleden, wat daarbij op logisch bewijs, intuïtief inzicht, of autoriteitsgeloof berustte. Onderzoekt men de zaak nader, dan blijkt, dat ze zich als volgt laat beschrijven: om de breuken te verkrijgen heeft men de bovengenoemde geheele getallen paarsgewijze tot nieuwe symbolen samengevoegd en voor zulke getallenparen bepaalde rekenregels ingevoerd, ontleend aan het rekenen met geheele getallen.

Het is echter heel wel mogelijk, voor de getallenparen deze rekenregels heel anders in te voeren, waardoor het systeem dier getallenparen in eigenschappen geheel zou afwijken van het ons bekende systeem der breuken.

In de wiskunde gaat men nu doorgaans als volgt te werk: men definiëert de breuken eenvoudig als getallenparen, waarvoor dat bepaalde systeem van bewerkingen is afgesproken [96].

Hierin ligt een sterk *formalistische* trek: hij, die dit voor het eerst ontmoet, voelt hier een kloof met de ervaring en vraagt zich af, wat deze getallenparen met het hem vertrouwde begrip der breuken en den in stukjes gesneden appel te maken hebben; bovendien vraagt hij zich af, waarom de rekenregels juist zóó, en niet anders werden gedefiniëerd. De wiskundige zal antwoorden, dat het probleem van de verhouding van rekenkunde tot ervaring zeer moeilijk is, maar dat dit probleem niet wordt verhelderd door genoemde verhouding bij iederen stap in den opbouw van zeker onderdeel der rekenkunde in de beschouwingen te betrekken. Bij de hier gegeven invoering der breuken, weet men tenminste, waar men over spreekt en heeft men een exacte theorie, exact in dezelfde mate als rekenkunde exact mag worden genoemd: het begrip breuk is *gearithmetiseerd*. De wiskundige geeft verder toe, dat ook invoering van andere rekenregels op zijn standpunt volkomen gelijk recht heeft; zulke systemen spelen dan ook in de wiskunde een groote rol, men denke slechts aan de „geheele complexe getallen" van *Gauss* [97]. Dat echter juist de breuken zulk een groote rol in de wiskunde spelen, het worde onmiddellijk toegegeven, zal voor een niet gering deel een gevolg zijn van het feit, dat ze door hun toepasbaarheid zoo'n groote rol spelen in het leven, maar waarop de toepasbaarheid berust, is, zooals reeds opgemerkt, een niet gemakkelijk probleem, ten aanzien waarvan verschillende standpunten mogelijk zijn, die echter (en dat is het voordeel der arithmetiseering) de hier bedoelde theorie der breuken zelve niet beïnvloeden, maar ten opzichte van haar, om zoo te zeggen, van andere orde zijn.

Op dezelfde wijze gaat men in de wiskunde te werk met de irrationale getallen. Op het naïeve standpunt is $\sqrt{2}$ a priori een grootheid, die men met groeiende nauwkeurigheid kan benaderen door een oneindig voortloopende rij van breuken (bijvoorbeeld door de worteltrekking maar steeds verder door te zetten). In de wiskunde wordt $\sqrt{2}$ juist gedefiniëerd als zoo'n rij van breuken [98]. Door voor dergelijke rijen goed gekozen rekenregels in te voeren, heeft men de leer van het reëele getal gearithmetiseerd [99].

Het systeem der complexe getallen kan men weer gemakkelijk arithmetiseeren door ze te definiëeren als paren van reëele getallen [100]).

Ook de meetkunde onttrekt zich aan het arithmetiseeringsproces niet; de analytische meetkunde levert immers het middel, om de meetkunde tot algebra en rekenkunde terug te voeren. Om tot volledige arithmetiseering te komen behoeft men nog slechts één stap te doen: de meetkundige grootheden en hunne betrekkingen arithmetisch te definiëeren [101]).

Voor al de besproken onderwerpen geldt met betrekking tot het probleem hunner verhouding tot de ervaring hetzelfde, als wat we reeds ten aanzien van de breuken opmerkten.

Wanneer men op de beschreven wijze de genoemde gebieden der wiskunde ontwikkelt als hoofdstukken der rekenkunde, wordt het onderzoek naar hunne *immanente* realiteit blijkbaar beheerscht door de vraag, welk bestaan de natuurlijke getallen 1, 2, 3, ... voeren; in dit licht mag men aan de *Pythagoraëen* toegeven, dat het (geheele) getal het wezen van althans alle *mathematische* dingen is [102]) en krijgt de beroemde uitspraak van *Kronecker* [103]) relief: „Die natürlichen Zahlen schuf der liebe Gott; alles andere ist Menschenwerk". (Van *Kronecker* is, het zij terloops opgemerkt, de uitdrukking „arithmetiseeren" afkomstig; *Kronecker* ging zelfs zoover, dat hij de irrationale getallen uit de wiskunde wilde bannen) [104]).

Natuurlijk is door de voorgaande opmerkingen de mogelijkheid niet aangetast, om bijvoorbeeld de meetkunde ook anders te grondvesten; toch houdt ook dan de arithmetiseeringsmogelijkheid hare waarde, omdat parallel aan dat anders opgezette meetkundige bouwsel, toch een rekenkundig gebouw kan worden opgetrokken, waarop te gelegener tijd een beroep kan worden gedaan, onder anderen, wanneer men er zich van wil overtuigen, dat het meetkundige bouwsel geen constructiefouten bezit [105]).

We zien ons, in het licht van het voorgaande, thans gesteld voor de vraag, wat de natuurlijke getallen zijn en we wenden ons allereerst tot hen, die van meening zijn, dat de rij dezer getallen ons door intuïtie gegeven is. Achter deze uitdrukking zoeke men niets bovennatuurlijks; de mensch toch bezit het vermogen om in den stroom des tijds bepaalde belevingen van andere min of meer scherp te onderscheiden; maar hiermede heeft hij dan ook reeds het besef van eenheid tegenover veelheid; en de mogelijkheid om iets, dat hij beleefd heeft, door een symbool aan te duiden, en dit later weer te herkennen, sluit blijkbaar reeds de notie in van de eindelooze getallenrij 1, 2, 3, ..., zoowel als van het fundamenteele principe der volledige inductie [106]) (waarvan reeds Poincaré uitdrukkelijk betoogde, dat het onzen geest intuïtief helder is) [107]).

Deze tendenties vinden wij terug in het intuïtionisme, zooals dat voor het eerst omlijnd is uitgesproken en tot een werkprogram met positieven inhoud is verheven door *L. E. J. Brouwer* [108].

De intuïtionist (in den zin van *Brouwer* en zijn school) wijst niet alleen op de onmogelijkheid, de natuurlijke getallen te grondvesten op iets dat fundamenteeler zou zijn, dan de zooeven aangeduide intuïtie; legt niet alleen den nadruk op de evidentie, die aan de eenvoudigste eigenschappen dier getallen op grond dier wiskundige oerintuïtie toekomt; en op de exactheid, die tengevolge daarvan de daarop rechtstreeks gebouwde deelen der wiskunde bezitten; maar (en hier blijven velen achter, die hem tot zooverre volgen), hij verklaart ook anderzijds deze deelen der wiskunde de geheele wiskunde te zijn, ja meer: identiek te zijn met dat deel van ons denken, dat recht heeft op den naam exact [109]. Zoo wordt aan een meetkunde, die geen hoofdstuk der rekenkunde ware, wiskundige waarde ontzegd [110].

De bezigheid, die hij aanduidt als rechtstreeks bouwen op de aan de wiskundige oerintuïtie ontspringende eigenschappen der natuurlijke getallen, nader beschouwende, komt *Brouwer* [111] tot de conclusie, dat de logica slechts een secundaire rol speelt en niets is dan de formuleering van wetmatigheden, die optreden in de wiskundige *taal,* welke nu eenmaal onvermijdelijk is, wanneer een wiskundige van zijn woordloos bouwen aan zich zelf of aan anderen rekenschap wil geven.

Als een misverstand wordt gesignaleerd [112], dat de wiskundigen deze wiskundige taal voor de wiskunde zelf hebben aangezien en hun taalgewrochten ook daar hebben gebouwd, waar geen wiskundig bouwen in hun geest daarmede parallel liep. In verband met de vraag in hoeverre zulke taalgebouwen wiskundige waarde kunnen hebben, wordt de betrouwbaarheid der logische principes onderzocht en betoogd, dat het principe van het uitgesloten derde ten onrechte het vertrouwen geniet, daaraan in den loop der tijden steeds geschonken [113]. In verband daarmede wordt de vroeger algemeen geheerscht hebbende opvatting verworpen, dat iedere verstandig gestelde wiskundige vraag noodzakelijk een ondubbelzinnig beslissend antwoord bezit, ongeacht of het in onze macht staat dat antwoord te vinden of niet [114].

Zoo zegt de klassieke wiskunde: „er bestaan oneindig veel priemgetallen of niet". Voor den intuïtionist is deze uitspraak in dien vorm zonder zin. Scherp wordt stelling genomen tegen dat „naïeve bestaansabsolutisme" [115], volgens hetwelk wiskundige objecten een bestaan zouden kunnen voeren, buiten den geest, die hen construeerde. De rij der natuurlijke getallen moet dan ook niet worden gezien als iets absoluut existeerends, maar als een wordende rij, die ik zoover kan uitstrekken als ik wil. De zooeven gedane uitspraak over de priemgetallen krijgt pas een zin, als ik ze nader preciseer, bijvoorbeeld op grond van de stelling van *Euclides*, dat men bij iedere n priemgetallen een (n + 1)-ste kan aanwijzen [116]. Het begrip *bestaan* krijgt zoo een wel omschreven zin: *een wiskundig object bestaat slechts, voor zoover het daadwerkelijk uit de wiskundige oerintuïtie is geconstrueerd.*

Aan het continuum als de totaliteit aller reëele getallen kan op dit standpunt evenmin absolute existentie worden toegeschreven; het moet worden beschouwd als een „Medium freien Werdens", waarin men zoovele reëele getallen kan scheppen, als men wil, door de opstelling van breukenrijen, die op zich zelf wel is waar niet af zijn, maar toch, desverkozen, door de een of andere wet in hun loop kunnen worden bestuurd [117].

Dit alles brengt mede, dat aan een existentiebewijs zeer hooge eischen van constructiviteit worden gesteld en dat zeer vele klassieke resultaten der wiskunde, den toets der intuïtionistische kritiek niet kunnen doorstaan [118]. Stellingen als „een, op een vak (A, B) continue functie, die in A negatief en in B positief is, wordt in een punt C van dat vak gelijk aan nul" en meer dergelijke, voor de analyse fundamenteele existentietheoremata, kunnen op intuïtionistisch standpunt in hun algemeenheid niet worden aanvaard [119]. De vraag of gangbare existentiebewijzen, eventueel na herziening kunnen blijven gehandhaafd, eischt in ieder voorkomend geval een grondig onderzoek; ten aanzien van de reeds eerder genoemde hoofdstelling der algebra werd een dergelijk onderzoek verricht door *De Loor* [120]. Welke beteekenis nog zou kunnen blijven gehecht aan de eveneens reeds eerder besproken metrische stellingen, valt niet met een paar woorden te zeggen [121].

Aanvaarding van het intuïtionisme beteekent opoffering van bloeiende deelen der klassieke wiskunde. De intuïtionist acht dit offer niet alleen gerechtvaardigd, maar verklaart den bloei schoonen schijn, het bezit der klassieke wiskunde, schijnbezit: papieren munt, door geen wiskundig goud gedekt. *Weyl* uitte het aldus [122]: „Wir müssen von Neuem Bescheidenheit lernen. Den Himmel wollten wir stürmen und haben nur Nebel auf Nebel getürmt, die niemanden tragen, der ernsthaft auf ihnen zu stehen versucht".

Tot zulke offers zijn de meeste wiskundigen niet, en zeker niet zonder ernstig verweer, geneigd, hoewel zij de zwakke plekken in de fundeering der klassieke wiskunde niet kunnen loochenen en de waarde der intuïtionistische kritiek tot op groote hoogte erkennen. *Hilbert* zegt [123] (met het oog op de verzamelingenleer en haar vèrstrekkende toepassingen): „Aus dem Paradies, dass uns *Cantor* geschaffen, soll uns niemand vertreiben können".

Een der pogingen om de klassieke wiskunde te redden, vinden we in het axiomatisch formalisme, gegroeid uit formaliseerende tendenties, zooals wij die reeds bij *Leibniz* aantreffen, wanneer hij in de formeel logische strengheid eener theorie hare rechtvaardiging ziet, ongeacht of haar eenige reëele beteekenis toekomt of niet [124].

Van groote beteekenis voor de verbreiding der formalistische opvatting van de wiskunde is ongetwijfeld de ontwikkelingsgang der meetkunde in de negentiende eeuw geweest.

Bij het vergeefsche zoeken naar een bewijs voor het zoogenaamde parallelen-axioma van *Euclides* toch, veroverde men het onverwachte inzicht, dat dit axioma van de andere axiomata onafhankelijk is, en, dat het mogelijk is, door weglating van het genoemde axioma, of bij vervanging door een afwijkend, andere, *niet-Euclidische,* geometrieën op te bouwen [125], die elk voor zich een systeem vormen van dezelfde logische onaantastbaarheid als het *Euclidische,* maar die daarvan, en naar het scheen ook van de *ervaring,* essentieel verschillen, hoewel, wat het laatste betreft, het voortschrijden der wetenschap aan het licht bracht, dat de nieuwe meetkunden in staat zijn, met niet minder scherpte van nauwkeurigheid die eigenschappen der physische ruimte te beschrijven, waarmede wij in onze ervaring van doen hebben, dan de *Euclidische,* ja in sommige gevallen boven deze de voorkeur verdienen [126].

Dat dit alles noodzaakt tot bezinning ten aanzien zoowel van het empiristische standpunt, dat in de axiomata van *Euclides* (zij het geïdealiseerde) ervaringswetten ziet, als van de *Kantiaansche* gedachte betreffende de *Euclidische* meetkunde als aanschouwingsvorm a priori van onzen geest, is duidelijk.

Een andere opvatting brak zich baan: de formalistisch-axiomatische, die we het zuiverst terugvinden in de meetkunde, zooals die door *Hilbert* werd ontwikkeld [127]. *Hilbert* grijpt terug op *Euclides* [128]. Deze geeft wel definities van zijne objecten, bijvoorbeeld: „een punt is wat geen deelen heeft", en dergelijke, maar in zijn verder werk wordt van den inhoud dezer definities geen gebruik meer gemaakt. *Hilbert* trekt hieruit de consequentie en definiëert zonder meer: „er zijn dingen: punten, lijnen, vlakken genaamd", het aan den lezer overlatend zich daarbij al of niet iets te denken. Voor de genoemde objecten legt hij dan eigenschappen in vrij door hem gekozen axiomata vast (wat op meer dan één manier mogelijk is) en gaat door logische redeneering uit deze axiomata stellingen afleiden.

Vraagt men, welke beteekenis aan deze stellingen toekomt, dan luidt het antwoord, dat zij zuiver formeel zijn; indien echter objecten zouden zijn aan te wijzen, die aan de opgestelde axiomata voldoen, dat zouden voor deze objecten tevens de afgeleide stellingen gelden.

De vraag is dus nu maar, of zulke objecten bestaan.

Dat een beroep op de ervaringsruimte hier niet kan baten, ligt, na het voorgaande, voor de hand. Niet is onmogelijk, dat, als de axiomata geschikt worden gekozen, het systeem practisch bruikbaar blijkt om bij benadering de verschijnselen uit die ervaringswereld te beschrijven; maar zulks behoort tot de *toepassing* van het systeem en is met het oog op de immanente eigenschappen van het systeem zelf, van weinig belang.

Waarin ligt dan de waarde van het systeem, als men afziet van bedoelde toepassingsmogelijkheid? Wel, wat overblijft om zich op te beroemen, is de logische onaantastbaarheid van het systeem: de zekerheid dat men daarin nooit tot een tegenspraak zal komen. Daar men echter voortdurend, over de objecten van het systeem sprekend, zegt, dat deze bestaan, ligt het voor de hand, dat waar als grond voor dit bestaan niets anders is overgebleven dan de zekerheid, dat de wijze, waarop het betreffende object in de theorie is ingevoerd, daar niet tot een contradictie kan leiden, men per definitie gaat vaststellen: *bestaan* is identiek aan *niet-strijdigheid met de axiomata.*

Dit is het standpunt. Maar nu het probleem! Immers, waarop grondt de formalist zijn zekerheid, dat de axiomata zijner meetkunde onderling tegenspraakloos zijn? Op het standpunt van *Kant,* of van den empirist moge die tegenspraakloosheid in den aard der zaak liggen, maar hoe, wanneer de axiomata zijn te beschouwen als *willekeurig* gekozen praemissen? Het is duidelijk, dat dan de tegenspraakloosheid een bewijs behoeft, en het ligt vrijwel voor de hand, dat men daarbij wel een beroep zal moeten doen op middelen, die buiten het systeem zelve zijn gelegen. Dit bewijs gelukte *Hilbert* op eenvoudige wijze, door de rekenkunde te hulp te roepen. Hoe dit mogelijk is, heb ik bij de bespreking van de arithmetiseering der meetkunde reeds aangeduid. Wat eigenlijk gebeurt, kan men ook zoo omschrijven, dat *Hilberts* axiomatisch systeem wordt „gevuld" door rekenkundige objecten. Indien nu maar de onaantastbaarheid van de rekenkunde vaststaat, is ook die van de meetkunde gewaarborgd en dit verklaart, dat ook de intuïtionist groote waarde hecht aan axiomatische systemen in den trant van *Hilbert,* voor zoover zij zich rekenkundig laten „vullen": voor den intuïtionist *is* de rekenkunde immers betrouwbaar en ontleent het systeem aan haar de waarde.

Niet aldus voor den formalist pur sang. Bij zijn beroep op de rekenkunde is het er hem niet zoozeer om te doen, om de meetkunde te arithmetiseeren, dan wel om het eerste het beste middel aan te grijpen, waarmee hij de tegenspraakloosheid van zijn systeem kan bewijzen.

Echter ook dat middel zelve dient kritisch bekeken. „Wat in de wiskunde bewezen kan worden", zegt *Hilbert* (in navolging van *Dedekind* [129])), „mag niet zonder bewijs aanvaard" en hij ziet niet in, waarom de leer der natuurlijke getallen hier een uitzondering zou moeten vormen [130]).

De methode nu, die aangegrepen wordt ter grondvesting van de rekenkunde, is, het ligt voor de hand, de formalistisch-axiomatische. En wij krijgen hier dus alles weer terug, wat bij de meetkunde reeds werd besproken: de definitie van *bestaan* als *contradictieloosheid* der theorie en het probleem, die *contradictieloosheid te bewijzen!*

Dat dit probleem veel moeilijker is, dan het analoge bij de meetkunde, dat wij zooeven bespraken, is duidelijk: men kan zich nu immers niet meer op de rekenkunde beroepen, daar deze zelf object van onderzoek is. Het probleem van den formalistischen opbouw der wiskunde is dan ook nog onopgelost, hoewel velerlei pogingen zijn gedaan, met name door *Hilbert* en zijn school [131]), die in verschillende theorieën logica en wiskunde gezamenlijk trachten op te bouwen, waarin dan het principe van het uitgesloten derde bijvoorbeeld de rol van een axioma speelt, dan wel een te bewijzen stelling wordt [132]). Bij deze pogingen van *Hilbert* dient men wel te onderscheiden tusschen het formeele systeem zelf, dat opgevat moet worden als een spel met teekens, op zich zelf zonder zin, en de beschouwingen over dat systeem: de *metawiskunde*. In deze metawiskunde laat *Hilbert* redeneeringen toe, die volgens hem geen bewijs behoeven, daar ze aanschouwelijk evident zijn. Dit houdt dus een groote concessie aan het intuïtionisme in, te meer, daar *Hilbert* ten aanzien van de logische regels, die hij in de metawiskunde toelaatbaar acht, nog strenger eischen stelt, dan intuïtionisten als *Brouwer* en *Weyl* ten aanzien van de in de intuïtionistische wiskunde toelaatbare logische wetten. Wil zoo *Hilbert* in de metawiskunde aan de aanschoulijke evidentie minder ontleenen, dan de intuïtionisten, in het formeele systeem wil hij boven dit *„finiete"* standpunt en boven de intuïtionistische wiskunde uitkomen. Over de mogelijkheid en onmogelijkheid nu van dit laatste is de strijd nog steeds gaande; de kloof blijft voorloopig nog wijd genoeg en de intuïtionist beschouwt het formalisme als een degradatie der wiskunde, dat voor hem „kostbare kleinood des geestes", een degradatie immers tot een spel [133]).

Mijns inziens echter zij men voorzichtig met al te haastige conclusies uit dergelijke qualificaties. Als men aan den intuïtionist vraagt, wat de wiskunde is en waarom hij ze beoefent, zal hij antwoorden, dat de wiskunde een vrije schepping van den menschelijken geest is, en hij zal daar misschien aan toevoegen, dat het antwoord op de vraag, in welke richting hij zijn gebouw zal optrekken, geheel subjectief is en bijvoorbeeld bij den een kan worden bepaald door het nut, dat de mensch in den strijd om het bestaan uit wiskundige systemen kan trekken, zoowel als het voor den ander louter kan afhangen van zijn lust- of onlustgevoelens. Vraagt men aan den formalist, welke waarde deze aan zijn systeem toekent, dan zal hij, metawiskundig redeneerend, misschien antwoorden, dat zijn formeel systeem zich tenslotte betrekt op iets, dat reëel, hetzij in, hetzij misschien buiten onzen geest bestaat, en dat hij tot de formalistische axiomatiek wel zijn toevlucht moet nemen, als hij de structuur van dat „iets" tot voorwerp van zijn denken wil maken [134]). Achter zijn spel kan dus diepen ernst schuilen.

Ik gewaagde in het begin dezer rede van den denkenden mensch, geplaatst in den rijkdom der schepping. Zoo ergens, dan zien wij in de grondslagencrisis der wiskunde een afspiegeling van het conflict, dat zich in dien mensch afspeelt: eenerzijds zijn zin voor exactheid, zijn behoefte aan intuïtieve helderheid, anderzijds echter zijn drang om de volle werkelijkheid (die meer is dan zijn denken) nochtans met dat denken als een gesloten Zijn te omvatten.

De Christen erkent op grond van Gods Openbaring de onmogelijkheid van het laatste, maar weigert ook, de eenige norm voor wat exact, werkelijk en waar is, te leggen uitsluitend in des menschen geest.

Van groote waarde lijken mij hier eenige gedachten van *Hermann Weyl*, die eenerzijds van de intuïtionistische wiskunde de uitzonderlijke waarde harer aanschouwelijke evidentie in het licht stellend, anderzijds aan het formalisme zijn beteekenis niet ontzegt, die daarin is gelegen, dat dit ons geloof aan realiteit en onzen drang naar totaliteit tegemoet komt en een weg baant om die werkelijkheid, waar ons schouwend inzicht te kort schiet, door een symbolische constructie te representeeren [135]).

Op deze wijze lijkt mij een evenwicht der verschillende spanningen bereikbaar, maar de opgave blijft, om de verschillende standpunten, die men krijgt bij successieve verruiming van het allerengste finiet-intuïtionistische standpunt, tot het ruimste, dat als eenigen eisch dien der tegenspraakloosheid stelt, op hun gehalte aan waarheid en werkelijkheid te onderzoeken.

Niet alleen in de wiskunde spreekt men van existentiebewijzen. Maar wanneer is getracht, in het denken te betrekken, wat onafhankelijk van dat denken zijn bestaan voert, dient steeds de vraag onder de oogen gezien, hoeverre de geldigheid zulker bewijzen reikt.

Zoo missen de zuiver verstandelijke bewijzen van het bestaan Gods de voor ieder gelijkelijk dwingende kracht van een constructief mathematisch existentiebewijs: de zekerheid van Gods bestaan wordt slechts gegrepen in het geloof, het geloof, dat een vaste grond is der dingen, die men niet ziet. Wie door dat geloof gegrepen is, weet, dat de velerlei werkelijkheid rust in die eene Werkelijkheid en dat het aardsch bestaan (ook het mathematische) in al zijn wisseling, oorsprong en doel vindt in Hem, Die van Eeuwigheid tot Eeuwigheid in Zich bestaat.

AANTEEKENINGEN.

1) Met verwaarloozing dus van een onderscheiding, die aanvankelijk en in onze taal kan worden gemaakt op grond van de afleiding: *werkelijk* is, wat *werkt*.

Iets soortelijks moge hier worden opgemerkt over den titel. In de Nederlandsche wiskundige taal komt het werkwoord „bestaan", doch zelden het werkwoord „existeeren" voor. De zelfstandige naamwoorden „bestaan" en „existentie" wisselen elkaar af, doch men spreekt nooit van een „bestaansbewijs", steeds van een „existentiebewijs". Op grond van dit alles beschouw ik hier de woorden „existeeren" en „existentie" eenvoudig als internationale uitdrukkingen, die in de wiskunde hetzelfde zeggen als ons woord „bestaan". Deze uitweiding in verband met het feit, dat het woord „existentie" tegenwoordig zoo zwaar is belast (vgl. W. J. Aalders, Het woord existentie in het moderne wetenschappelijke spraakgebruik, Meded. Kon. Akad. Wetensch., deel 75, serie A; 1933; blz. 23—68), terwijl het woord „bestaan" in het algemeen als vlakker wordt aangevoeld (althans naar het mij wil voorkomen).

2) *J. Woltjer*, Ideëel en Reëel (1896). Afgedrukt in de „Verzamelde Redevoeringen en Verhandelingen van Dr. J. Woltjer", Deel I, Amsterdam 1931; blz. 178—235.

3) Zie het onder 2) a.w., blz. 185.

4) Zie het onder 2) a.w., blz. 186.

5) Zie het onder 2) a.w., blz. 186, 187.

6) Zie het onder 2) a.w., blz. 189.

7) *Georg Cantor* spreekt van de *immanente (intrasubjectieve)* realiteit der natuurlijke getallen op grond van het feit, dat ze als gevolg van definities in ons denken een bepaalde plaats innemen en van hunne *transiente (transsubjectieve)* realiteit op grond van het feit, dat zij toepasbaar zijn op gebeurtenissen en betrekkingen der buitenwereld.

G. *Cantor*, Ueber unendliche, lineare Punktmannichfaltigkeiten. Math. Ann 21 (1883), blz. 545—591, speciaal blz. 562. Ook in *Cantors* Gesammelte Abhandlungen (Berlijn 1932) blz. 165—209, speciaal blz. 181.

8) *A. Cayley*, Presidential Addres to the British Association. September 1883. Afgedrukt in „The Collected Mathematical Papers of A. Cayley" (Cambridge 1896). Vol XI, blz. 429—459, speciaal blz. 433.

Het citaat luidt in het oorspronkelijke: „I would myself say that the purely imaginary objects are the only realities, in regard to which the corresponding physical objects are as the shadows in the cave".

9) *Jakob Steiner*, Ueber Maximum und Minimum bei den Figuren

in der Ebene, auf der Kugelfläche und im Raume überhaupt. Afgedrukt in *Steiners Werke* II (Berlijn 1882), blz. 177—308.

Op blz. 193 zegt *Steiner:* „Wenn aber bei demselben gegebenen Umfange die Figuren ungleichen Inhalt haben können, dieser jedoch nicht beliebig gross sein kann, so muss es nothwendig entweder *eine* Figur geben, die unter allen den grössten Inhalt hat, oder es müssen mehrere verschieden geformte Figuren statt finden, die diese Eigenschaft gemein haben, d.h. welche unter sich gleichen, aber grösseren Inhalt haben, als jede der übrigen. Dabei ist klar: dass jede Figur, deren Inhalt unter Beibehaltung des Umfanges sich vergrössern lässt, nicht zu jenen grössten Figuren gehört".

Opmerking. Deze verhandeling van *Steiner,* welke uit twee deelen bestaat, is uit het jaar 1841, doch was vóór het verschijnen van *Steiners* Werke slechts in Fransche vertaling gepubliceerd geweest; en wel deel 1 in

J. d. Math. p. appl. *6* (1841), blz. 105—170

J. f. d. r. und angew. Math. *24* (1842), blz. 93—162

en deel 2 in

J. f. d. r. und angew. Math. *24* (1842), blz. 189—250.

10) Bij ieder vierkant toch, dat kleiner is dan het gegeven vierkant, kan men een nieuw vierkant aangeven met een iets grootere oppervlakte, die echter kleiner kan worden gekozen dan die van het gegeven vierkant.

11) *A. S. Besicovitch,* On *Kakeya's* problem and a similar one. Math. Zeitschrift, 27 (1928); blz. 312—320.
(Hier is tevens nog eenige oudere literatuur aangegeven).
Een eenvoudiger inkleeding der bewijsgedachten van *Besicovitch* geeft *O. Perron,* Über einen Satz von *Besicovitch.* Math. Zeitschrift, 28 (1928); blz. 383—386.

12) *S. Kakeya,* Some Problems on Maxima and Minima regarding Ovals. Tôhoku Sci. Reports 6 (1917), blz. 71—88.

13) Een der studenten heeft als colloquiumopgave het bewijs van *Besicovitch—Perron* op dit punt op mijn verzoek nader onderzocht. Het blijkt, dat, wanneer de voorgeschreven oppervlakte ε wordt gesteld, de straal van den bedoelden cirkel van de orde van grootte $\frac{1}{\varepsilon}$ is.

14) *J. Pál,* Ein Minimum Problem für Ovale. Math. Ann. 83 (1921), blz. 311—319. Hier vindt men nog eenige literatuur aangegeven over verwante onderwerpen.

15) Volgens *H. Rademacher—O. Toeplitz* (Von Zahlen und Figuren, Berlijn 1930, blz. 162), houdt een opmerking in het Commentaar van *Simplikios* op *Aristoteles'* De Coelo (Berl. Ak. Ausg. VII, S. 412_{13}) in, dat *Archimedes* en *Zenodorus* hebben bewezen, en dat reeds voor *Aristoteles* bekend is geweest, dat

van de vlakke figuren de cirkel, van de lichamen de bol, bij gelijken „omtrek" den grootsten „inhoud" heeft.

16) Iets dergelijks komt ook voor bij uitdrukkingen als

$$\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2\ldots}}}$$

Geeft men dit symbool een zin, door het op te vatten als de *eventueele* limiet der getallenrij

$$(1) \qquad \sqrt{2},\quad \sqrt{2+\sqrt{2}},\quad \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}},\ldots$$

en noemt men die limiet in de veronderstelling, dat ze bestaat, x, dan geldt onder deze veronderstelling blijkbaar:

$$x > o, \quad x = \sqrt{2+x},$$

d.w.z. :

$$x > o \quad x^2 - x - 2 = o,$$

d.w.z. :

$$(2) \qquad x = 2$$

Het komt er dus maar op aan, te bewijzen, dat x inderdaad bestaat. Men kan dit doen door aan te toonen, dat de rij (1) begrensd en monotoon is, waaruit dan de existentie harer limiet volgt, maar dat alles ligt inderdaad dieper dan de bovenstaande simpele afleiding van (2).

17) Op deze uitdrukking zullen wij nog terug moeten komen.

18) *F. Edler*, Vervollständigung der *Steinerschen* elementargeometrischen Beweise für den Satz, dass der Kreis grösseren Flächeninhalt besitzt, als jede andere ebene Figur gleich grossen Umfanges. Nachrichten v. d. Kgl. Ges. d. Wiss. zu Göttingen 1882 (No. 4), blz. 73—80.
Geheel andere, doch ook zeer eenvoudige bewijzen der hier besproken isoperimetrische stelling geven C. *Carathéodory* en *E. Study* in een gemeenschappelijke verhandeling: Zwei Beweise, dass der Kreis unter allen Figuren gleichen Umfanges den grössten Inhalt hat. Math. Ann. 68 (1910), blz. 133—140.

19) Ik heb in dit verband wel eens den naam van *Hilbert* hooren noemen.

Toevoeging bij de correctie: In het pas verschenen Nr. 1 van het „*Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde*" (26e jg, 1938/1939) bemerk ik een artikel van *O. Bottema*, Twee minimum-vraagstukken uit de Planimetrie (blz. 3—7), waarin het isoperimetrische probleem wordt aangeroerd en waarin ook de bovengegeven redeneering over de getallenrij 1, 2, 3, ... wordt gegeven. De auteur schrijft dit voorbeeld toe aan *Perron*, echter zonder bronnenvermelding.

Toevoeging bij de revisie: De verhandelingen van Perron nagaand, vond ik het tegenvoorbeeld inderdaad door hem gepubliceerd en wel tegelijkertijd met een aantal andere (niet

alle oorspronkelijk door *Perron* gevondene, doch dan met bronvermelding aan andere mathematici ontleende) in het artikel:
O. Perron, Zur Existenzfrage eines Maximums oder Minimums, Jahresber. d. D. M. V. *22* (1913), blz. 140—144. Zie ook:
O. Perron, Über Wahrheit und Irrtum in der Mathematik, Jahresber. d. D. M. V. *20* (1911), blz. 196—211.
R. Sturm, Zur Existenzfrage eines Maximums oder Minimums, Jahresber. d. D. M. V. *22* (1913), blz. 43—44.

[20]) De oorzaak daarvan is waarschijnlijk hierin te zoeken, dat *Steiners* onder [9]) geciteerde artikel, dat behalve het isoperimetrische probleem ook vele soortgelijke vragen behandelt, in twee deelen is verschenen. Alleen in het eerste deel (bij *Steiners* eerste bewijs) vindt men (op blz. 193) de hier onder [9]) geciteerde uitspraak; deze wordt in deel II bij de vier andere bewijzen niet herhaald, wat den bovenbedoelden indruk kan wekken.

Toevoeging bij de revisie: Dezen indruk wekt zelfs *Perron* in zijn eerste onder [19]) a.w., als hij o.a. uitdrukkelijk verklaart, dat zijn tegenvoorbeelden „die Fehlerhaftigkeit der *Steiner*schen Beweisführung in helles Licht setzen" (blz. 142). Het blijkt overigens uit het tweede onder [19]) a.w. van *Perron* (blz. 202), dat deze zeer wel van de uitspraak van *Steiner* (zie onder [9])) op de hoogte is.

De fout, die *Steiner* maakt door de juistheid dier uitspraak zonder bewijs aan te nemen, is, zooals reeds opgemerkt, zeer ernstig. Het is de vraag of hij later haar heeft ingezien; uit *W. Blaschke*, Kreis und Kugel (Leipzig 1916) blijkt n.l. het interessante feit, dat *Dirichlet* getracht heeft *Steiner* van de lacunes in diens bewijzen te overtuigen (blz. 4; zie ook de opmerking van *Perron* in zijn eerste onder [19]) a.w., blz. 140).

[21]) Deze naam is op historische gronden te veroordeelen. Zoo hield zich vóór *Dirichlet* o.a. reeds *Gauss* met het probleem bezig. Door de overstelpende hoeveelheid literatuur tot beperking gedwongen, volsta ik met aangaande dit probleem en zijn geschiedenis te verwijzen naar twee artikelen in de „Encyklopaedie der Mathematischen Wissenschaften":

H. Burkhardt—W. F. Meyer, Potentialtheorie. (Enc. II A 7 b in Bd. II, 1, [1]; blz. 464—503); speciaal blz. 486 e.v.
L. Lichtenstein, Neuere Entwicklung der Potentialtheorie. Konforme Abbildung. (Enc. II C 3 in Bd. II, 3, [1]; blz. 177—377).

[22]) Voert men in het vlak Cartesiaansche coördinaten (x, y) in, dan luidt de differentiaalvergelijking van Laplace:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0;$$

een functie, die aan deze vergelijking voldoet, heet een *potentiaalfunctie*. De theorie dezer functies speelt zoowel een rol in de mathematische physica, als in de zuivere wiskunde (met name in de complexe-functietheorie).

23) Literatuur in het eerste der onder 21) geciteerde artikelen, blz. 489 e.v.

24) Vgl. behalve de onder 23) aangehaalde plaats: *A. Hurwitz—R. Courant*, Funktionentheorie, Berlin 1925 $_2$, blz. 298 e.v.

25) Literatuur in het onder 23) a.w., blz. 492 e.v.

26) Literatuur in het onder 23) a.w., blz. 494. Vgl. verder het onder 24) a.w., blz. 411 e.v.

27) Literatuur in het onder 23) a.w., blz. 494.

28) Vgl. voor de geschiedenis van het „*Dirichletsche Prinzip*" ook: *Felix Klein*, Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im neunzehnten Jahrhundert I, Berlin 1926, speciaal blz. 259—267.

29) Zie het onder 28) a.w., blz. 264.

30) Zie de onder 29) aangehaalde plaats.

31) Literatuur in het onder 23) a.w., blz. 495.

32) Vgl. b.v. het onder 24) a.w., blz. 381 e.v.

33) Literatuur in de onder 21) aangehaalde artikelen, blz. 495—503, resp. blz. 177 e.v. Voor eenige nieuwere methoden, zie ook hunne bespreking door *A. F. Monna*, Het Probleem van *Dirichlet*. Diss. Leiden 1935.

34) Literatuur in het tweede der onder 21) genoemde artikelen, blz. 327 e.v.

35) Zie: *E. Picard*, Traité d' Analyse II (Paris 1925_3), blz. 368 e.v. en bijvoorbeeld ook het leerboek van *L. Bieberbach*, Differentialgleichungen (Berlin 1926_2), blz. 25 e.v.

36) Een hoogeremachtsvergelijking in de onbekende x heeft de gedaante

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n = 0,$$

waar $n \geq 1$ en $a_0 \neq 0$ is en de getallen $a_0, a_1, \ldots, a_n$ reëel gedacht zijn. Zie voor de regula falsi bijvoorbeeld het leerboek van *F. Schuh*, Lessen over de Hoogere Algebra, Deel I (Groningen 1921), blz. 461—462.

37) Zie bijv. *O. Perron*, Die Lehre von den Kettenbrüchen (Leipzig-Berlin, 1929_2).

Voor literatuur over de kettingbreuken en de theorie der benaderingen in het algemeen, zij verder verwezen naar mijn „*Diophantische Approximationen*" (Berlin 1936), in het vervolg geciteerd als *D.A.* (Wat de kettingbreuken betreft, speciaal Kap. III).

38) Het opstellen van analoga der kettingbreuken, ter simultane benadering van reëele getallen, is een zeer moeilijk probleem;

zie *D.A.*, Kap. IV. *Hermite* zegt in een brief aan *Stieltjes*: „La recherche des fractions $\frac{p'}{p}\frac{p''}{'p}$ qui approchent le plus de deux nombres donnés n' a cessé depuis plus de 50 ans de me préoccuper et aussi de me désespérer". (Correspondance d' Hermite et de Stieltjes II, Paris 1905, blz. 389).

39) Vgl. *D.A.*, blz. 5 e.v., 8 e.v.

40) De theorie van *Dirichlet* betreffende de eenheden vindt men kort, doch volledig ontwikkeld in de „Vorlesungen über Zahlentheorie, Bd. 3" van *E. Landau* (Leipzig 1927) en wel op blz. 158—170.

41) Literatuur in *D.A.*, Kap. IV. Een heldere, volledige uitvoering der bewijzen van *Thue—Siegel* bij *Landau* in het onder 40) a.w., blz. 37—65.

42) Literatuur in *D.A.* (zie „Literaturverzeichnis" onder *Khintchine*).

43) *L. J. Mordell*, On some arithmetical results in the geometry of numbers. Compos. Math. *1* (1934), blz. 248—253.
J. G. van der Corput, Verallgemeinerung einer *Mordellschen* Beweismethode in der Geometrie der Zahlen. Acta Arithmetica *1* (1935), blz. 62—66. Verdere literatuur in *D.A.*, Kap. II.

44) Zie bijv. de Encyclopaedie van *Winkler Prins* onder „Haar".

45) Een resultaat, dat overigens misschien geen groote verwondering zal baren, gelet op de frequentie der categorieën met laag rangnummer.
Het zal geen betoog behoeven, dat in de bovenbedoelde bewijzen, waarbij het ladenprincipe een hoofdrol speelt, de redeneering niet zoo eenvoudig gaat. Zoo behoort het hoofdstuk over de stellingen van *Thue—Siegel* tot de moeilijkste en diepste in het onder 40) aangehaalde boek van *Landau*.

46) Een schets van de grondgedachten van *Hilberts* bewijs vindt de lezer bij *O. Toeplitz*, Der Algebraiker *Hilbert*. Die Naturwissenschaften *10* (1922), blz. 73—77. Literatuur in het „Verzeichnis der bisherigen Publikationen von *David Hilbert*" (a.w., blz. 99—103). *Gordan*, die zich eerst tegen de bewijsmethode van *Hilbert* verzette, moest wel hare draagkracht erkennen. Hij drukte zijn gevoelens betreffende *Hilberts* bewijs uit, door het als „theologisch" te qualificeeren.
Vgl. *D. Hilbert*, Die logischen Grundlagen der Mathematik. Math. Ann. *88* (1923), blz. 151—165; speciaal blz. 161.

47) *G. Cantor*, Ueber eine Eigenschaft des Inbegriffes aller reellen algebraischen Zahlen. Journal f. d. reine u. angew. Math. *77* (1874), blz. 258—262. Ook afgedrukt in *G. Cantor*, Gesammelte Abhandlungen (Berlin 1932), blz. 115—118.
Literatuur betreffende de onderzoekingen van *Liouville* in *D.A.*, Kap. IV.

48) Voor de definitie eener hoogeremachtsvergelijking zie 36).

Ieder rationaal getal $\frac{a}{b}$ (a geheel, b geheel $\neq$ o) is dus algebraisch, want het voldoet aan de eerstegraadsvergelijking

$$bx - a = 0.$$

Zoo zijn ook $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{2}$ en *i* algebraisch, want deze getallen voldoen respectievelijk aan de vergelijkingen

$$x^2 - 2 = 0, \quad x^3 - 2 = 0, \quad x^2 + 1 = 0.$$

49) Zie het onder 47) a.w.; ook de uitvoerige weergave door *A. Fraenkel,* Einleitung in die Mengenlehre (Berlin 1928_3), blz. 35—50.

50) Dit laatste met behulp zijner zoogenaamde *diagonaalmethode,* die helderder dan in het onder 47) a.w. in latere verhandelingen van *Cantor* wordt in het licht gesteld. Men zie voor deze methode en de vele haar betreffende literatuur ook *A. Fraenkel,* ter onder 49) a.p.

51) Overigens zij opgemerkt, dat dit de gedaante is, waarin het door *Cantor* wordt gegeven en waarin het in de gangbare leerboeken wordt voorgedragen.

52) Deze gedachtengang stemt dus geheel overeen met de grondgedachten van *Cantor* zelve, alleen wordt de (hulp)stelling van de niet-aftelbaarheid van het continuum uitgeschakeld.

Uitvoeriger geschetst, gaat het procédé als volgt: Eerst legt men een principe vast ter nummering van alle hoogeremachtsvergelijkingen met geheele coefficienten. Dit gaat eenvoudig genoeg op den door *Cantor* (zie het onder 47) a.w.) geschetsten weg (uitvoerig toegelicht door *Fraenkel* ter onder 50) a.p.). Voor een willekeurige dezer vergelijkingen kan men nu in een eindig aantal stappen de som N van haren graad m, vermeerderd met de som van de graden aller haar in de rij voorafgaande vergelijkingen bepalen. Uit de coefficienten der beschouwde vergelijking leest men onmiddellijk een boven- en een ondergrens voor hare eventueele reëele wortels af. De bekende stellingen uit de algebra over de aantallen en de benadering van reëele wortels leveren dan in een eindig aantal stappen, van deze wortels (zoo zij inderdaad voorkomen) N cijfers achter de komma in hunne decimale ontwikkeling (het aantal dezer wortels is in ieder geval $\leq$ m). Door substitutie in de vergelijking ga men thans na, of onder de aldus verkregen afbrekende decimale breuken misschien wortels der vergelijking voorkomen, in welk geval men zulk een breuk verandere in een breuk met oneindig vele negens. Men ordene de aldus verkregen breuken in een monotoon niet dalende sequentie en door deze sequenties achter elkaar te plaatsen in de volgorde der (reeds genummerde) er mede correspondeerende vergelijkingen, heeft men een nummeringsprincipe verkregen voor de *exacte* beginstukken der *oneindig voortloopende* decimale ontwikkelingen *aller reëele algebraische getallen* en wel heeft de n-de decimale breuk B_n uit deze rij minstens n decimalen (in de rij zullen dezelfde algebraische getallen herhaalde malen door een beginstuk vertegenwoordigd zijn, doch dat stoort den bewijsgang niet). Men vorme nu de decimale breuk o, a_1 a_2 a_3 ..., waarin a_n voor n = 1, 2, ... volgens een willekeurig vast te leggen principe gekozen wordt, maar in ieder geval zoodanig, dat a_n afwijkt van de n-de decimaal b_n der n-de breuk B_n uit de zooeven geconstrueerde rij *(diagonaalmethode)* en niet van zekeren index af steeds gelijk is aan nul. De oneindig voortloopende tiendeelige breuk o, a_1 a_2 a_3 ... is dan een ondubbelzinnig vastgelegd getal, dat zeker transcendent is, wijl geen beginstuk zijner decimale ontwikkeling in de rij der beginstukken B_1, B_2, ... voorkomt.

53) e = 2,718 ... beteekent hier e.v. de basis van het stelsel der natuurlijke logarithmen, π = 3,1415 ... het getal van *Archimedes*. Deze getallen zijn inderdaad transcendent, zooals omstreeks 1880 werd bewezen: voor e door *Hermite*, voor π door *Lindemann*. (Literatuur in *D.A.*, Kap. IV).

54) Met een soortgelijk betoog als dat onder 52) toont *H. Lebesgue* (Sur certaines démonstrations d' existence; Bull. de la Soc. Math. de France *45* (1917), blz. 132—144, speciaal blz. 135) aan, dat men kan „nommer un nombre réel" met de eigenschap E op grond der genoemde stelling. Hij geeft echter toe, dat dit „nommer" niet hetzelfde is als „calculer" (blz. 136). Inderdaad, daartoe toch zou noodig zijn, dat men van de getallen van R het beginstuk hunner decimale ontwikkeling kon opschrijven.

55) Wegens de uitgebreidheid der betreffende literatuur, noem ik slechts de korte, doch duidelijke ontwikkeling van deze maattheorie door *J. Wolff*, Metriek van puntverzamelingen; *Lebesgue*-integratie, Mathematica B (Zutphen) *4* 1935/1936, blz. 1—12, 33—50, 65—71. Voor literatuur zie men het uitgebreide artikel in de onder 21) geciteerde Encyclopädie van *L. Zoretti—A. Rosenthal*, Die Punktmengen (Bd. II, *3*, 2, blz. 852 e.v.).

56) Deze stelling is bevat in een diepere van *Lebesgue* (een bewijs dezer laatste bijv. in het onder 55) a.w. van *Wolff*) en werd in de geciteerde gedaante op eenvoudige wijze bewezen door *Knopp*. (Literatuur in *D.A.*, Kap. III § 5).

57) Zie bijvoorbeeld: *E. Borel*, Leçons sur la théorie des fonctions (Paris 1914_2), blz. 194 e.v. Verdere literatuur in *D.A.* Kap. IX § 6.

58) Zie echter het interessante artikel van *K. Mahler*, Über die Dezimalbruchentwicklung gewisser Irrationalzahlen. Mathematica *B* (Zutphen) *6* (1937/1938), blz. 22—36).

59) t. onder [57]) a.p.

60) Deze inkleeding heb ik aan *J. Popken*, Over het rekenkundig karakter van getallen (Openbare Les Groningen 1937), ontleend, waar zij op analoge manier, doch veronderstellenderwijze op π wordt toegepast. *Popken* verwijst naar *E. Borel*, Sur quelques applications des probabilités à l' arithmétique. Sphinx *4* (1934). Blz. 81—84.

61) Literatuur in *D.A.*, Kap. I § 4, VIII § 3, IX § 6, X § 1.

62) *H. Weyl*, Über die Gleichverteilung von Zahlen modulo Eins. Math. Ann. 77 (1916), blz. 313—352.

63) Zie mijn „Ein mengentheoretischer Satz über die Gleichverteilung modulo Eins", Compositio Math. *2* (1935); blz. 250—258.

64) Inplaats van „bijna alle (resp. „bijna geene") getallen hebben de eigenschap E", luiden de uitspraken: „de kans, dat een getal de eigenschap E bezit is 1, resp. 0". In den nieuweren tijd wordt de maattheorie der puntverzamelingenleer gebruikt als grondslag der waarschijnlijkheidsleer.

65) Vgl. *D.A.*, blz. 47.

66) Vgl. *D.A.*, Kap. III § 5, V § 3.

67) *K. Mahler*, Über das Mass der Menge aller S-Zahlen. Math. Ann. *106* (1932), blz. 131—139.
Het resultaat van *Mahler* werd door *H. Turkstra* op het gebied der P-adische getallen overgedragen: Metrische bijdragen tot de theorie der Diophantische approximaties in het lichaam der P-adische getallen. (Diss. V.U. 1936).

68) Literatuur in *D.A.* t. onder [66]) a.p.

69) Literatuur in *D.A.* t. onder [66]) a.p.

70) Hier hangt ook veel af van wat men onder „aangeven" verstaat. Vgl. het onder [54]) a.w. van *Lebesgue*.

71) Zie het onder [62]) a.w., blz. 345.

72) Zie het onder [63]) a.w., benevens mijne verhandelingen: Metrisches zur Theorie der Diophantischen Approximationen, Kon. Akad. Wet. Proc. *39* (1936), blz. 225—240. Metrisches über die Approximation reeller Zahlen, Kon. Akad. Wet. Proc. *41* (1938), blz. 45—47.

73) en tevens een *aansporing*.

74) *Ch. Pisot*, La répartition modulo 1 et les nombres algébriques (Diss. Paris 1938); ook Ann. Scuola norm. sup. Pisa II. s. *7* (1938), blz. 205—248.
W. Sierpinski, Démonstration élémentaire du théorème de *M. Borel* sur les nombres absolument normaux et détermination effective d' un tel nombre. Bull. de la Soc. Math. de France *45* (1917), blz. 125—132.

75) Zie voor de discussies over het actueel oneindige de in de onder [7]) genoemde Ges. Abh. van *Cantor* opgenomen correspondentie. Voor het „Auswahlprinzip" en de antinomieën zie

men het onder [49]) a.w. van *Fraenkel;* voor de op het „Auswahlprinzip" gebouwde existentiebewijzen o.a. ook de onder [57]), resp. [54]) a.w. van *Borel* en *Lebesgue,* waar verdere literatuur wordt genoemd.

Voor de existentie van niet-meetbare verzamelingen zie men o.a. het slot van het onder [55]) a.w. van *Wolff.*

Op de antinomieën der verzamelingenleer ga ik in deze rede niet verder in, te meer omdat ik dit uitvoerig heb gedaan in het geschrift *„Wiskunde en Waarheid",* Referaat voor de 21e Wetenschappelijke Samenkomst der Vrije Universiteit (1 Juli 1936).

76) Enkele der hierna te bespreken vragen en opvattingen heb ik, in ander verband, uitvoeriger behandeld in het onder [75]) aangehaald referaat.

77) Medegedeeld door *O. Hölder* (Die Mathematische Methode, Berlijn 1924, blz. 487), die aanteekent: „Die Kenntnis dieses Worts von *Riemann* verdanke ich einer mündlichen Mitteilung von *H. A. Schwarz".*

78) Men denke bijvoorbeeld aan de techniek van differentiëeren en integreeren of aan het formeele apparaat der invariantentheorie.

79) Nl. als hypothenusa van een gelijkbeenig-rechthoekigen driehoek met zijde 1.

80) De onmogelijkheid der cirkelquadratuur met passer en liniaal is een direct gevolg van de transcendentie van het getal π (zie [53])). Uit analytisch-meetkundige beschouwingen volgt namelijk, dat ieder lijnstuk, dat bij een gegeven lengte-eenheid met passer en liniaal in een eindig aantal stappen kan worden geconstrueerd, noodzakelijk een lengte heeft, die door een algebraïsch getal (zie boven bij [48])) wordt uitgedrukt.

81) *Euclides* geeft zijn bewijs in Prop. 20 van Boek IX. Zie bijv. de uitgave van *E. J. Dijksterhuis,* De Elementen van *Euclides,* Deel II (Groningen 1930).

82) Hoewel de *probleemstelling* binnen de bedoelde meetkunde zinvol is.

83) Samenvattende naam voor differentiaal- en integraalrekening; deze vakken worden ook aangeduid als *„analyse".*

84) Wat de uitdrukking „uitvinden" betreft, deze mag strikt genomen alleen op de differentiaalrekening worden betrokken: de oorsprongen der integraalrekening gaan terug tot op *Archimedes.*

Een heldere, niet te uitvoerige, inleiding tot deze vakken in de Nederlandsche taal geeft het werk van *H. J. E. Beth,* Inleiding tot de Differentiaal- en Integraalrekening (Groningen 1934).

In een historisch aanhangsel vindt men bijzonderheden ook over de bovengenoemde mathematici en hun werk.

De belangstellende lezer zij verder verwezen naar het instructieve werk van *Felix Klein*, Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus (Berlin 1933 $_4$), waar men tal van historische en andere bijzonderheden vindt; over de hier in geding zijnde vakken in Band I.

85) *Newton* hield zijn belangrijkste werk over de „fluxierekening" jaren lang terug (zie bijvoorbeeld het historische aanhangsel in het onder [84]) a.w. van *Beth*.

86) Lit. bijv. in de Enc. d. Math. Wiss., Band II, I, 1; blz. 58—60. Zie ook het onder [84]) a.w. van *Klein*, Band I, o.a. blz. 223 e.v.

87) Zie de onder [86]) a.p. der Enc. d. Math. Wiss.

88) Zie bijvoorbeeld het inhoudsrijke onder [28]) a.w. van *F. Klein*.

89) Eenvoudige voorbeelden van dergelijke functies gaven sindsdien verschillende mathematici, o.a. *B. L. van der Waerden;* het voorbeeld van *v. d. Waerden* is uitvoerig weergegeven in de „Einführung in die Differentialrechnung und Integralrechnung" van *E. Landau* (Groningen 1934) (blz. 73—78).

90) Nl. in 1545 door *Cardano* (vgl. het onder [84]) a.w. van *Klein* I, blz. 61).

91) De formule luidt ($i = \sqrt{-1}$) :

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

en werd in 1748 door *Euler* gevonden.

92) Vgl. [90]) t.a.p.

93) Voor een levensbeschrijving van *Gauss* zie men bijv. het onder [28]) a.w. van *Klein*, Kap. I; over de Hoofdstelling der Algebra, speciaal blz. 54 e.v.

94) Voor de definitie eener hoogeremachtsvergelijking, zie [36]).

95) In een plat vlak worden twee onderling loodrechte assen (x-as en y-as) aangenomen. Als in de analytische meetkunde wordt nu ieder punt aangeduid door zijn (reëele) coördinaten (x, y). Dit punt nu wordt opgevat als beeldpunt van het *complexe* getal $x + iy$ (de getallen x heeten *reëel*, de getallen iy *zuiver imaginair*; alle getallen van de gedaante $x + iy$, met inbegrip dus van de reëele en de zuiver imaginaire, heeten *complex*). Zie [100]).

96) De lezer vindt een dergelijke theorie volledig doorgevoerd bijv. bij *F. Schuh*, Het Getalbegrip, in het bijzonder het onmeetbare getal (Groningen 1927).

Opmerking: Op de invoering der negatieve getallen gaan we hier niet in; ze is eenvoudig genoeg; zie het a.w.

97) Complexe getallen $x + iy$, waar x en y *geheel* zijn.

98) Bijvoorbeeld op de manier van *Cantor* (zie [99])). Men leze het interessante artikel van *Cantor*, afgedrukt in zijne onder [7])

geciteerde Ges. Abh., blz. 114, tegen *Illigens*, die op het naïeve standpunt staat. (Oorspronkelijk komt dit artikel voor in Math. Ann *33* (1889), blz. 476.

[99]) Verschillende wijzen van invoering der irrationale getallen *(Cantor, Dedekind, Weierstrass, Baudet)* in het onder [96]) a.w.

[100]) Bijvoorbeeld uitgevoerd bij *P. Wijdenes*, Middel Algebra (Groningen 1934 $_2$), blz. 161 e.v. Hier wordt tevens de onder [95]) bedoelde meetkundige voorstelling van *Gauss* ontwikkeld.

[101]) Vgl. het leerboek „Analytische Meetkunde" I van *J. A. Barrau* (Groningen 1933 $_2$), waar aanvankelijk een „stelkundig" en een „meetkundig" vlak worden onderscheiden en later vereenigd.

[102]) Zooals men weet luidde de uitspraak der Pythagoraeën: het getal is het wezen aller dingen.

[103]) In een voordracht voor de „Berliner Naturforscher-Versammlung" in 1886. Zie *H. Weber*, „Leopold Kronecker". Math. Ann. *43* (1893), blz. 1—25, speciaal blz. 15.

[104]) O.a. in „Über den Zahlbegriff", J. für die reine u. angew. Math. *101* (1887), blz. 337—355, speciaal blz. 338—339; 353.

[105]) Hierop kom ik nog terug bij de bespreking van den axiomatischen opbouw der meetkunde volgens *Hilbert*.

[106]) Het principe drukt uit: een zekere eigenschap E zal gelden voor *ieder* natuurlijk getal ≥ 1, indien 1°. voor ieder natuurlijk getal $n \geq 1$ is bewezen, dat het getal $n + 1$ de eigenschap E bezit, aangenomen, dat het getal n de eigenschap E bezit, en indien 2°. bovendien is bewezen, dat voor het getal 1 de eigenschap E geldt.

[107]) *H. Poincaré*, La Science et l' Hypothèse (Paris 1905), Chap. I; blz. 21—23. Ook in het Duitsch vertaald: Wissenschaft und Hypothese (Leipzig-Berlin 1914 $_3$).

[108]) *L. E. J. Brouwer*, Over de grondslagen der Wiskunde (Diss. Amsterdam 1907).
Wiskunde, Waarheid, Werkelijkheid (Groningen 1919).
Uitvoerige besprekingen van het intuïtionisme (met uitgebreide literatuur opgaven) in het onder [49]) genoemde werk van *A. Fraenkel* en in het „Bericht" van *Brouwers* leerling en medestander *A. Heyting*, Mathematische Grundlagenforschung. Intuitionismus. Beweistheorie. Erg. d. Math. III, 4; Berlin 1934).

[109]) Zie bijv. het onder [108]) a.w. van *Heyting*, blz. 11.

[110]) Zie bijv. het onder [108]) a.w. van *Heyting*, blz. 29.

[111]) Zie het eerste opstel in het tweede onder [108]) a.w. van *Brouwer*. blz. 4—12. (Het opstel heet: „De onbetrouwbaarheid der logische principes").

[112]) Zie [111]) t.a.p.

[113]) Zie [111]) t.a.p.

114) Zie 111) t.a.p. Zie ook *H. Weyl*, Über die neue Grundlagenkrise der Mathematik. Math. Zeitschr. *10* (1921), blz. 39—79, speciaal blz. 53 e.v.

115) Deze term is, zoover ik weet, van *Weyl* afkomstig; zie bijv. *H. Weyl*, Randbemerkungen zu Hauptproblemen der Mathematik. Math. Zeitschr. *20 (1924)*, blz. 131—150, speciaal blz. 146—150.

116) Zie blz. 16 dezer rede.

117) Lit. in het onder 108) a.w. van *Heyting*, blz. 18 e.v. en het onder 49) a.w. van *Fraenkel*, blz. 236 e.v. Zie speciaal het onder 114) a.w. van *Weyl*, blz. 49—59.

118) Zie bijv. de kritische beschouwingen in het onder 108) a.w. van *Heyting*, blz. 11 e.v. Daar vindt men verdere literatuur.

119) Zie o.a. het onder 118) a.w., speciaal blz. 21—25.

120) *B. de Loor*, Die Hoofstelling van die Algebra van intuïsionistiese standpunt (Diss. Amsterdam 1925). Zie ook het door *Weyl* gegeven bewijs (in het onder 115) a.w., blz. 142—146).

121) Zie bijv. de opmerkingen in het onder 108) a.w. van *Heyting*, blz. 22.

122) Zie het onder 114) a.w. van *H. Weyl*, blz. 70.

123) *D. Hilbert*, Über das Unendliche, Math. Ann. *95* (1925, blz. 161—190; speciaal blz. 170.

124) Zie bijv. het onder 84) a.w. van *F. Klein* I, blz. 231, 232.

125) Zie bijv. *Hk.* de Vries, De vierde Dimensie (Groningen 1925_2) of *H. J. E. Beth*, Inleiding in de Niet-Euclidische Meetkunde op historischen grondslag (Groningen 1929).

126) Zie bijv. het tweede opstel in het tweede onder 108) a.w. van *Brouwer*, blz. 5—23. (Het opstel heet: „Het wezen der meetkunde").

127) *D. Hilbert*, Grundlagen der Geometrie (Leipzig-Berlin 1930_7). Dit boek bevat verder overdrukken van oudere verhandelingen over de Grondslagen der Wiskunde van de hand van *Hilbert*.

128) *Euclides*, Elementen. Zie bijv. *E. J. Dijksterhuis*, De Elementen van *Euclides* I (Groningen 1929), II (Groningen 1930).

129) *R. Dedekind*, Was sind und was sollen die Zahlen? Braunschweig 1930_6); Vorwort zur ersten Auflage, blz. III.

130) Zie hierover bijv. *D. Hilbert*, Neubegründung der Mathematik I, Abh. Hamb. Math. Sem. *1* (1922); blz. 157—177.

131) Zie het onder 108) a.w. van *Heyting*, blz. 35 e.v. (waar ook vele literatuur) en het grootsch opgezette werk van *D. Hilbert* und *P. Bernays*, Grundlagen der Mathematik I (Berlin 1934).

132) Op een andere poging tot opbouw der wiskunde met behoud van haren klassieken inhoud door de z.g. *logicisten* als *Russell* e.a., die de wiskunde ontwikkelen als toepassing der (geformaliseerde) logica, ga ik hier niet in. Zie bijvoorbeeld het onder 49) a.w. van *Fraenkel* (in mijn onder 76) a.w. vindt men eveneens

eenige desbetreffende beschouwingen).

133) Zie het onder 108) a.w. van *Heyting*, blz. 54.
Voor de vergelijking van de formalistische wiskunde met een spel, zie ook de onder 115) en 135) a.w. van *Weyl*.

134) Zie bijvoorbeeld *D. Hilbert*, Axiomatisches Denken, Math. Ann. *78* (1918), blz. 405—419, speciaal blz. 415. *Hilbert* zegt daar: Ich glaube: Alles, was Gegenstand des wissenschaftlichen Denkens überhaupt sein kann, verfällt, sobald es zur Bildung einer Theorie reif ist, der axiomatischen Methode und damit mittelbar der Mathematik. Durch Vordringen in immer tieferliegenden Schichten von Axiomen im vorhin dargelegten Sinne gewinnen wir auch in das Wesen des wissenschaftlichen Denkens selbst immer tiefere Einblicke und werden uns der Einheit unseres Wissens immer mehr bewusst. In dem Zeichen der axiomatischen Methode erscheint die Mathematik berufen zu einer führenden Rolle in der Wissenschaft überhaupt.

135) *H. Weyl*, Die Stufen des Unendlichen (Jena 1931).
Soortgelijke gedachten spreekt *Weyl* ook reeds uit aan het slot van zijn onder 115) a.w.