

Dr. G. H. A. GROSHEIDE F.Wzn.

ENKELE MERKWAARDIGHEDEN VAN
DE MEETKUNDIGE TERMINOLOGIE



W

69

WB

ENKELE MERKWAARDIGHEDEN VAN
DE MEETKUNDIGE TERMINOLOGIE

ENKELE MERKWAARDIGHEDEN VAN DE MEETKUNDIGE TERMINOLOGIE

REDE

TER GELEGENHEID VAN DE
77e HERDENKING VAN DE
STICHTING DER VRIJE UNIVERSITEIT
OP 21 OCTOBER 1957
UITGESPROKEN DOOR DE
RECTOR MAGNIFICUS

Dr. G. H. A. GROSHEIDE F.Wzn.



1957

UITGEVERSMIJ J. H. KOK N.V.
KAMPEN

DE NEDERLANDSE FLORA
EN DE NEDERLANDSE FAUNA

*Mijne Heren Directeuren der Vereniging voor Hoger Onder-
wijs op Gereformeerde Grondslag,
Mijne Heren Curatoren der Vrije Universiteit,
Dames en Heren Hoogleraren, Lectoren en Docenten,
Dames en Heren Leden van de Wetenschappelijke Staf,
Dames en Heren Studenten,
En voorts Gij allen, die deze plechtigheid met Uw aanwezig-
heid vereert.*

Zeer gewaardeerde Toehoorderessen en Toehoorders,

In zijn werk over Simon Stevin wijst Dijksterhuis er op (blz. 298), dat „het geen ongewoon verschijnsel is, dat aanleg en liefde voor wiskunde gepaard gaan met een levendige belangstelling in taalkundige verschijnselen”. Hij acht dit zeer verklaarbaar, want „het nooit aflatend streven om de gedachte met de uiterst beschikbare graad van nauwkeurigheid in woorden uit te drukken moet immers wel van zelf leiden tot verdieping van de aandacht voor zinsbouw en woordbetekenis”. In dezelfde richting gaat een opmerking van Mannoury¹⁾, die de klemtoon even anders legt, namelijk, dat „er wellicht geen enkel vak van studie is, waarbij de woordkeus de beoefenaar zoveel hoofdbrekens kost, als dat in de wiskunde het geval is”. Het op verantwoorde wijze gebruik maken van de taal is een essentieel element in de arbeid van de mathematicus; waarbij hij zich geplaatst ziet voor problemen, die blijkbaar niet steeds van eenvoudige aard zijn. Bij enige van deze problemen wil ik deze middag met U stil staan, nu wij, in dankbaarheid voor veel zegen aan onze universiteit gedurende het afgelopen jaar geschonken, voor de 77ste maal haar stichting herdenken. Ik moge dan Uw aandacht vragen voor enkele merkwaardigheden van de meetkundige terminologie.

Het is geen uitzondering, dat een wiskundige geroepen wordt zich tot het kiezen van een benaming te zetten. Telkens wanneer hij een nieuw begrip heeft ingevoerd, een nieuwe bewerking heeft gedefinieerd of een bijzonder geval van een reeds lang bestudeerd object heeft ontdekt, kan de wenselijkheid, ja zelfs de praktische noodzakelijkheid

hiertoe zich voordoen. Om niet voortdurend genoodzaakt te zijn tot het maken van onderscheidingen, zullen wij, ongeacht de aard van de mogelijke gevallen, in het vervolg steeds spreken over het toekennen van een naam aan een nieuw object. Wij beginnen met er op te wijzen, dat dit niet altijd onmiddellijk behoeft te geschieden.

Onderstellen wij even, dat de kegelsneden nog nimmer de aandacht hebben getrokken en dat nu één der geometers uit de voorhoede een studie gaat maken van de vlakke kromme, die de meetkundige plaats is van alle punten, waarvan de som van de afstanden tot twee vaste punten een gegeven waarde bezit. Deze denkbeeldige mathematicus zal — althans aanvankelijk — zeer wel met vrucht werkzaam kunnen zijn, zonder dat hij aan de door hem beschouwde figuur de een of andere naam heeft geschonken. Ook voor het uitbrengen van een eerste verslag over zijn werk behoeft hij niet beslist hiertoe over te gaan. Hij kan immers na het geven van de definitie, zonder enige kans op misverstand, voortdurend spreken van „de” meetkundige plaats of zich ook bedienen van de veel toegepaste methode en de onderzochte kromme kortweg aanduiden door een letter. Deze laatste mag hij dan volkomen vrij kiezen, zonder zich er om te bekommeren, of zij reeds elders als kenteken voor iets anders werd gebruikt. De mogelijkheid is evenwel aanwezig, dat de omstandigheden, mede dank zij het wereldkundig maken der verkregen resultaten, zich volledig wijzigen. Indien namelijk blijkt, zoals in de onderstelde situatie zonder twijfel het geval zou zijn, dat een nieuw onderzocht object, hetzij om zijn merkwaardige eigenschappen, hetzij om zijn betekenis voor de theorie in het algemeen een blijvende belangstelling verdient, moet dit, alleen reeds terwille van het onderling overleg tussen allen, die zich dan aan de bestudering er van wijden, een eigen naam verkrijgen.

Het antwoord op de vraag hoe men een figuur, een bewerking of een relatie het beste kan noemen, moge soms gemakkelijk zijn te vinden, het is dit zeker niet altijd. Een zinvolle benaming van de zoëven gedefinieerde meetkundige plaats ligt bijvoorbeeld stellig niet voor de hand. Bovendien volgt uit de definitie van een object nooit ondubbelzinnig, welke naam het behoort te dragen, zoals later verschillende malen zal blijken, en ook is af te lezen uit een voorbeeld, dat wij thans geven.

Men kan zich langs een rechte lijn in twee richtingen bewegen; als wij eenvoudigheidshalve aan een horizontale streep op een bord denken: van links naar rechts en van rechts naar links. Wanneer nu van de twee methoden van voortschrijden één bepaalde wordt voor-

geschreven, zegt men, dat de rechte van een oriëntatie wordt voorzien. De georiënteerde rechte verkrijgt in de gewone vlakke meetkunde betrekkelijk weinig aandacht, al vervult zij bij de analytische opbouw daarvan een belangrijke functie. Geheel anders staat het in de vlakke meetkunde van Laguerre, waarvan de genoemde figuur één der bouwstenen is en waarin dientengevolge de behoefte ontstond haar met een speciale naam aan te duiden. Twee verschillende, doch beide verantwoorde benamingen werden daarbij voorgesteld.

Laguerre zelf noemde de georiënteerde rechten aanvankelijk ²⁾ „directions”, doch heeft vermoedelijk ervaren, dat dit tot moeilijkheden aanleiding gaf. Later althans sprak hij van „semi-droites”, waarmee hij aansloot bij de gedachte, dat een rechte is op te vatten als de superpositie van twee georiënteerde rechten. Study, die deze gedachte stellig niet verwierp, volgde toch Laguerre niet bij zijn keuze en voerde de naam „Speer” in. Hij werd hiertoe ongetwijfeld geleid door het feit, dat men in tekeningen gewoonlijk door het plaatsen van een pijltje de voorgeschreven bewegingsrichting kenbaar maakt. Na Study wordt in de litteratuur algemeen van speren gesproken. Volledigheidshalve merken wij nog op, dat de introductie van deze figuren meestal even anders geschiedt dan boven beschreven, zulks om ook imaginaire rechten in de beschouwingen te kunnen betrekken.

De geschetste gang van zaken wat betreft de georiënteerde rechten toont, dat het niet uitgesloten is, dat voor een gegeven object meer dan één naam passend is te achten en doet tevens uitkomen, dat het nemen van een beslissing daaromtrent op gronden van zeer uiteenlopende aard kan geschieden. Van de motieven, die men bij het toekennen van benamingen en bij het kiezen van bepaalde uitdrukkingen laat gelden en van de factoren, die bij de uitbouw van de terminologie van invloed zijn, willen wij er enige de revue laten passeren.

Dan merken wij allereerst op, dat de kromme lijn, waarover in de aanhef werd gesproken, zeer waarschijnlijk haar algemeen bekende naam „ellips” niet zou hebben verkregen, indien zij inderdaad als de meetkundige plaats van punten met de in onze definitie opgenomen eigenschap binnen de gezichtskring der meetkundigen was gekomen. Volgens Dijksterhuis, aan wiens verklaring van „Vreemde Woorden in de Wiskunde” ook hierna nog een enkele maal iets ontleend wordt, heeft Apollonius van Perga in de 3de eeuw v. Chr. de benaming ellips aan deze kromme gegeven, omdat zij een merkwaardigheid bezit, die onder woorden is te brengen met behulp van het begrip elliptische aanpassing uit de griekse oppervlakterekening. Toen hij zijn keuze deed, was

dus bij Apollonius een leidende gedachte, dat een figuur of relatie door de wijze, waarop zij wordt aangeduid in meerdere of mindere mate gekenmerkt moet zijn. Deze laatste overweging vormt vanzelfsprekend menigmaal, maar toch niet steeds het hoofdmotief bij het bepalen hoe een object moet genoemd worden. Ook dan staat het te nemen besluit nog niet van te voren vast, want een object heeft gewoonlijk meer dan één karakteristieke eigenschap en zo is het niet te verwonderen, dat allerlei benamingen het stempel dragen van de stand van het wetenschappelijk onderzoek in de tijd, waarin ze ontstonden.

Dat ellips, hyperbool en parabool gezamenlijk kegelsneden heten, herinnert aan het feit, dat deze krommen aanvankelijk werden voortgebracht door een omwentelingskegel te snijden met een vlak loodrecht op één zijner beschrijvenden. Dat ze daarnaast ook tweedegraads krommen genoemd worden, berust op hun voorstelling in rechtlijnige coördinaten en stamt dus eerst uit de tijd na de invoering dezer coördinaten. Dat tenslotte de kegelsneden naast hun toch zinvolle oorspronkelijke naam als vanzelf nog een tweede eveneens verantwoorde ontvingen, toont, dat de opkomst van de analytische naast de synthetische methode in de meetkunde ook in de terminologie bemerkbaar is. Het is een eenvoudig voorbeeld uit het begin van een ontwikkeling, die zich met name in de algebraïsche meetkunde bijzonder krachtig voortzette. In de voorrede van zijn na de laatste oorlog verschenen werk over dit onderwerp doet André Weil de voor de gegroeide situatie karakteristieke mededeling, dat hij (eerst) in hoofdstuk vier de meetkundige taal zal introduceren.

Hoewel de benamingen kegelsnede en ellips dezelfde achtergrond hebben, is er toch tussen beide een typisch onderscheid. Een kegelsnede is inderdaad te beschouwen als de doorsnijdingsfiguur van een kegel en een vlak, doch bij de ellips is er geen sprake van ἔλλειψις, een tekort schieten. Dit doet het ene van twee lijnstukken, die de griekse wiskundigen bij hun behandeling van de ellips construeerden, ten opzichte van het andere. Wij maken hier kennis met een veel voorkomend verschijnsel, dat men een associatief element in de terminologie kan noemen.

De voorbeelden zijn niet moeilijk te vinden. Men spreekt van een elliptisch punt van een oppervlak, als een bepaalde aan dit punt toegevoegde kegelsnede, de indicatrix van Dupin, een ellips is. Homogene coördinaten zijn aldus genoemd, omdat de vergelijkingen, waardoor algebraïsche krommen en oppervlakken in deze coördinaten worden voorgesteld, homogeen zijn. Een complex punt is niet iets, dat meer

dan één ding bevat, doch een punt, waarvan de coördinaten complexe getallen zijn, d. w. z. getallen met meer dan één soort eenheden. Analoge aantekeningen zijn te maken bij aanduidingen als kubische meetkunde, partieel vlak, nulverwantschap en andere.

In ruimere zin is een associatief element aanwezig, wanneer van vier gerangschikte punten O, A, B en C van een rechte gezegd wordt, dat ze harmonisch gelegen zijn, omdat hun dubbelverhouding (OABC) de waarde -1 bezit. Harmoniëren doen in dit geval de tonen, welke worden voortgebracht door een drietal snaren van hetzelfde materiaal, waarvan de lengten zich verhouden als OA, OB en OC. Bij de naamgeving is hier dus van doorslaande betekenis geweest het verband dat bestaat met een merkwaardigheid van niet-wiskundige aard; evenals zo dikwijls, wanneer er een toepassingsmogelijkheid is in de mechanica of de natuurkunde. Wij beperken ons er toe te herinneren aan benamingen als zwaartepunt, brandpunt en tensor.

Nauw verwant met het besproken verschijnsel is het voorkomen van namen, welke door het opmerken van analogie werden ingegeven. Zo heet één der vormen van niet-euclidische meetkunde „hyperbolische meetkunde”, omdat de rechten daarin twee oneigenlijke punten bezitten en in dit opzicht gelijkenis vertonen met de hyperbool in het euclidische vlak. Misschien moeten tot deze rubriek ook gerekend worden de uitdrukkingen „optellen” en „vermenigvuldigen van punten”, die beide een constructie aanduiden, waardoor aan twee punten A en B van een rechte ondubbeltzinnig een derde punt C van die rechte wordt toegevoegd. Voor deze constructies, die ten opzichte van drie vooraf op de rechte gekozen punten O, E en W worden uitgevoerd, gelden in de klassieke meetkunde, naar men kan bewijzen, dezelfde wetten als voor de optelling en de vermenigvuldiging van getallen. Indien het vaststellen van dit feit de aanleiding is geweest de meetkundige bewerkingen juist als de overeenkomstige rekenkundige aan te duiden, is de grond van het spraakgebruik de aanwezigheid van analogie of zoals een wiskundige in dit geval het zou uitdrukken, het optreden van isomorfie.

Het lijkt mij echter geen al te gewaagde veronderstelling, dat de werkelijke gang van zaken een andere is geweest. Weliswaar niet de tegenwoordige, van Hessenberg afkomstige, methode, maar toch het principe van de optelling en de vermenigvuldiging van punten is geïntroduceerd door Von Staudt in het kader van een onderzoek, dat hij omstreeks een eeuw geleden aan de synthetische projectieve meetkunde wijdde en waarbij hij deze meetkunde volledig wilde funderen zonder gebruik te maken van maatbepalingen. Tengevolge van deze doelstelling

kon Von Staudt het aan vier gerangschikte punten van een rechte toegevoegde getal, dat door Möbius ratio bisectionalis (dubbelverhouding) werd genoemd, hoewel het een projectieve invariant is, niet als grondbegrip gebruiken, daar het in de euclidische meetkunde wordt gedefinieerd met behulp van de lengten van vier door de punten bepaalde lijnstukken. De moeilijkheden, die hieruit voortvloeiden, loste hij op, door — kort gezegd — in plaats van met dubbelverhoudingen met puntenviertallen te gaan werken. Zo gaf hij twee voorschriften om aan twee gerangschikte viertallen W, O, E, A en W, O, E, B ondubbeltzinnig een derde W, O, E, C op dezelfde rechte toe te voegen. Het opvolgen daarvan bij een rechte in het euclidische vlak kan men interpreteren als het construeren van een viertal W, O, E, C , waarvan de dubbelverhouding gelijk is aan de som (of het product) van de dubbelverhoudingen van de viertallen W, O, E, A en W, O, E, B . Dit doet vermoeden, dat het spreken van optellen en vermenigvuldigen van punten meer op associatie dan op het constateren van analogie berust; te meer omdat de constructieregels van punten ongetwijfeld uit die voor lijnstukken met gegeven lengten zijn afgeleid.

Volledigheidshalve wijzen wij er nog op, dat in de moderne algebra de woorden som en product in een algemenere betekenis gebruikt worden dan bij het rekenen met natuurlijke getallen, namelijk ook als de voor het laatste geldende wetten niet of slechts ten dele van kracht zijn. Typerend hiervoor is, dat men in de groepentheorie het aan twee gerangschikte elementen toegevoegde element nu eens liever tot som, dan weer liever tot product proclameert. Een analoge generalisatie maakt men in de meetkunde, wanneer men ook in niet-arguesiaanse vlakken de vermelde constructies optellen en vermenigvuldigen van punten blijft noemen.

Vanwege de voorname rol, die de gerangschikte gerichte puntenviertallen in zijn beschouwingen vervulden, kende Von Staudt daaraan de afzonderlijke naam „Worp” toe. Zodoende werd zijn zich stellen op een bepaald axiomatisch standpunt de oorzaak, dat de woordenschat der meetkunde een kleine uitbreiding onderging. Wij leren hier een voorbeeld kennen van het verschijnsel, dat soms overwegingen van axiomatische, systematische, filosofische of aesthetische aard een zekere invloed op de meetkundige terminologie uitoefenen.

Voor een volgend voorbeeld kunnen wij ook in de projectieve meetkunde terecht. Daarin treedt, naar men zegt, dualiteit op, waaronder in het tweedimensionale geval wordt verstaan, dat naast iedere juiste uitspraak een andere eveneens juiste voorkomt, die uit de eerste is te

verkrijgen door de rollen van punt en rechte en die van snijden en verbinden te verwisselen. De toestand is nu deze, dat het overgaan van een stelling of een definitie op de daarmede duale (het zogenaamde „vertalen”) in het algemeen meer inhoudt, dan alleen het verwisselen van de woorden punt en rechte en van de woorden snijden en verbinden. Dit is een gevolg van de wijze, waarop men gewoon is zich uit te drukken. Men spreekt immers, onder meer, bij het punt van „liggen op een rechte”, doch bij de rechte van „gaan door een punt”.

Het is begrijpelijk, dat men getracht heeft de fraaie symmetrie, die in de vlakke projectieve meetkunde aanwezig is, ook in de beschrijving daarvan te laten uitkomen. Daarbij werd het beoogde doel bereikt door aan de uitdrukking „incident met” behalve haar letterlijke betekenis „vallend op” ook de betekenis „gaande door” toe te kennen. Men kan nu een punt en een rechte met elkander incident noemen en heeft zijn formulering dan zo gekozen, dat bij het vertalen — althans zolang meer samengestelde begrippen niet onder een eigen benaming optreden — met het verwisselen van de woorden punt en rechte kan worden volstaan.

Een derde voorbeeld van het verschijnsel, dat wij thans bezien, hangt samen met het in de loop van de vorige eeuw verworven inzicht, dat een meetkundige theorie niet anders is dan een deductief systeem. Haar uitgangspunt wordt gevormd door een aantal axioma's, die niet bedoelen een uitspraak over de fysische werkelijkheid te doen, maar die enkele grondobjecten, welke overigens volledig ongedefinieerd blijven, in het bezit van eigenschappen stellen. De werkzaamheid der meetkundigen gaat nu op in het maken van logische gevolgtrekkingen uit deze axioma's. Daarbij zal het dikwijls het betoog begrijpelijker maken en ook beter bij bestaande kennis doen aansluiten, wanneer men er toe overgaat aan de grondobjecten namen als punt, rechte, vlak en dergelijke te schenken. Men behoeft dit laatste echter in het geheel niet te doen en laat het soms na, omdat men wil voorkomen, dat als gevolg van een te aanschouwelijke terminologie aan de grondobjecten meer kenmerken worden verbonden, dan hun door de axioma's werden toebedeeld of omdat men wil bewerken, dat duidelijk uitkomt, dat slechts de logische structuur van belang is.

Een nederlandse wiskundige denkt hier terstond aan het bekende leerboek van Barrau, waarvan de eerste paragraaf in dit opzicht een zekere faam verkreeg. Barrau geeft namelijk een analytische opbouw van de vlakke projectieve meetkunde, doch spreekt daarbij aanvankelijk niet van punten en rechten, doch van elementen van de eerste en

elementen van de tweede soort, die dan tezamen het stelkundige vlak vormen. Hoewel dit feitelijk ressorteert onder het vorige punt, tekenen wij hierbij eerst even aan, dat deze wijze van uitdrukken in staat stelt nog iets meer de aanwezige dualiteit te laten uitkomen, dan bij gebruik van de namen punt en rechte mogelijk is. Men kan thans uitspraken doen, die niet slechts met zich zelf dual zijn, maar bovendien bij vertalen volkomen ongewijzigd blijven, zoals: „bij twee verschillende elementen van de ene soort behoort juist één element van de andere soort, dat met beide incident is”.

Doch dit terzijde. Wat thans de aandacht verdient is, dat de door Barrau gekozen terminologie accentueert, dat de logische samenhang het voornaamste is, waar het om gaat. Het is volmaakt onverschillig of men de elementen van de eerste soort: punten en die van de tweede soort: rechten, dan wel of men omgekeerd de elementen van de eerste soort: rechten en die van de tweede: punten noemt. Daarenboven kan men de theorie nog op andere wijzen realiseren, bijvoorbeeld door als elementen te beschouwen de rechten van een stralenschoof en de vlakken van een vlakkenchoof met dezelfde top. Het is dan natuurlijk weinig zinvol, dat de totale figuur stelkundig vlak heet.

Ook bij een opbouw van de projectieve meetkunde op de basis van de „lattice-theory” treden benamingen als punt en rechte pas later op. Men gaat uit van een verzameling van dingen, waarover men in eerste instantie niets anders veronderstelt, dan dat ze tot de verzameling behoren en waaraan men deswege de naam „element” geeft. Vervolgens neemt men aan, dat binnen de verzameling een gedeeltelijke rangschikking aanwezig is, hetgeen inhoudt, dat elk element één of meer toegevoegde bezit. Aan de regels die voor deze toevoeging gelden, kunnen wij stilzwijgend voorbijgaan; voor ons van belang is, dat zij op uiteenlopende wijzen wordt aangeduid. Van de relatie, waarin een element tot de daaraan toegevoegde staat, zegt men immers nu eens, dat zij er een is van „bevat zijn in” of „behoren tot”, dan weer dat zij er een is van „voorafgaan aan” of „deel zijn van”. De woordkeus staat hier kennelijk onder invloed van de verschillende mogelijkheden om de theorie te realiseren en heeft zich in dit geval daarvan niet los gemaakt.

Aangezien de toevoeging, zoals ook uit de vermelde benamingen blijkt, niet symmetrisch is, kan het gebeuren, dat er elementen zijn, die niet aan een van hen zelf verschillend element zijn toegevoegd. Een dergelijk element, waarin dus geen ander bevat is, of anders, waarvan dus geen ander deel uit maakt, noemt men dan „aatom” of ook

„punt”. Vooral dit laatste is merkwaardig; want in de eerste plaats grijpt het als het ware terug op de door Euclides in de Elementen gegeven definitie: „een punt is, wat geen delen heeft”; en in de tweede plaats geschiedt het onafhankelijk van een of andere meetkundige interpretatie, zodat in het systeem der natuurlijke getallen, dat een „lattice” is, de één recht op de naam punt verkrijgt.

Zonder dat aan zekere eisen voldaan is, is een gedeeltelijk gerangschikte verzameling nog geen „lattice” en in een „lattice” moeten verdere voorwaarden vervuld zijn, wil men daarin elementen kunnen aanwijzen, waaraan namen als punt, rechte en vlak toekomen. Wij gaan hierop niet nader in, omdat het geen nieuwe dingen naar voren brengt. Wel maken wij nog de opmerking, dat de behoefte om de elementen, ook wanneer men niet met een speciaal model bezig is, van een nadere aanduiding te voorzien zeer verklaarbaar is. Na de invoering van de gedeeltelijke rangschikking heeft men niet meer te maken met zuivere verzamelingen en bezitten de elementen meer eigenschappen dan alleen tot de verzameling te behoren. Bij een algemeen „lattice” noemt men soms de dingen, die het opbouwen niet elementen maar „somata”.

De drie voorbeelden, die wij gaven van bijzonderheden in de terminologie, welke in verband staan met het vooraf innemen van een bepaald standpunt, zijn alle gelegen in de klassieke sfeer. Wij willen thans onze aandacht richten op de invloed van het intuïtionisme, dat — volgens een uitspraak van Brouwer — „aan verschillende vermeende wiskundige theorieën iedere wiskundige betekenis onttrekt en de wiskunde een algemene omwerking doet ondergaan, waarbij zij helaas op vele plaatsen haar soepel en elegant karakter moet verliezen en in veel stroever, gewrongener en ingewikkelder vormen heeft te treden”. In het artikel ³⁾ „Willen, weten, spreken”, waaraan dit citaat ontleend is, wordt dit geïllustreerd door de „onhoudbaarheid in het licht te stellen van vier even elementaire als klassieke eigenschappen”. Vergelijkt men nu de nieuwe door Brouwer opgestelde theorema's met de oorspronkelijke, dan blijkt, dat deze zich alleen door hun inhoud en niet door de wijze van formulering onderscheiden. Als minder verdragende stellingen, die „het intuïtionistisch juist blijvende gedeelte” onder woorden brengen, kunnen zij zonder meer in de klassieke wiskunde worden opgenomen.

Daarentegen worden in het betoog, dat aan de theorema's voorafgaat en waarin de vier klassieke theorema's worden weerlegd, specifiek intuïtionistische begrippen gebruikt, die vanzelfsprekend een eigen benaming dragen. Zo ontmoeten wij termen als „vluchtende eigenschap”,

„duaal slingergetal” en „duaal naderingsgetal”, die men elders tevergeefs zoekt. En tot dit drietal blijft het niet beperkt. Nemen wij bijvoorbeeld een meer recent artikel ⁴⁾ van Brouwer over de „Contradictoriteit der elementaire meetkunde”, dan lezen wij daar van „uitsluitend in de verte plaats vindende manifestaties”, van „tweezijdige dempingsgetallen”, van een „tweezijdige aanstuiving” en van „puntkernsoorten”.

De noodzaak een groot aantal nieuwe begrippen in te voeren vloeit voort uit het door het intuïtionisme gekozen uitgangspunt. Men is van oordeel, dat iets eerst dan behoorlijk gedefinieerd is, als een middel is aangegeven om het te construeren en komt in deze lijn doordenkend soms met Brouwer tot de verwerping van het beginsel van het uitgesloten derde. Dit dwingt er toe vernuftige methoden te ontwerpen en subtielere onderscheidingen te maken dan in de klassieke wiskunde gebruikelijk zijn.

Ter nadere toelichting van het zo juist opgemerkte vermelden wij nog enkele dingen uit het proefschrift van Heyting, dat de „Intuitionistische Axiomatiek der projectieve meetkunde” behandelt. Na een eerste hoofdstuk, dat aan de opbouw van de analytische meetkunde is gewijd, begint een tweede met het opstellen van een aantal axioma's. Nummer één daarvan luidt: „de ruimte is een wiskundige soort”, waaraan is toegevoegd de bepaling: „de elementen der ruimte heten punten”. Er wordt hier dus over de ruimte niet gesproken als over een verzameling van punten, zoals in de klassieke wiskunde geschiedt. Dit berust op het feit, dat Brouwer de verzamelingen op grond van de wijzen, waarop zij worden voortgebracht, verdeelde in soorten en spreidingen en is dus meer dan een kwestie van terminologie alleen.

Anders staat het met het tweede axioma, waarmede tussen twee punten A en B een relatie wordt geïntroduceerd, die betiteld wordt met „afwijken van”. Hier wordt het gewoonlijk gebezigde „verschillen van” vermeden, omdat reeds eerder aan „plaatselijk verschillen” een zeer speciale betekenis werd toegekend. Later wordt dan bewezen, dat de relatie van afwijken overeenkomt met die van plaatselijk verschillen in de analytische meetkunde. Van soortgelijk karakter, maar naar mijn mening wel zeer vergaand is het, wanneer in het laatste hoofdstuk over de „postulaten” voor een getallenstelsel wordt gesproken, omdat de naam „axioma's” voor de meetkunde wordt gereserveerd.

Leggen wij tenslotte het derde axioma „er kunnen ten minste twee van elkander afwijkende punten bepaald worden” naast het veel voorkomende „er zijn ten minste twee punten”, dan springt de samenhang

met de opvatting omtrent hetgeen gedefinieerd zijn inhoudt, terstond in het oog.

Wat betreft de benamingen, welke voor de nieuwe intuitionistische begrippen werden gekozen, valt op te merken, dat deze in het algemeen min of meer beschrijvend van karakter zijn. Zo wordt een soort bepaald door het voorschrijven van een eigenschap, die zijn elementen moeten bezitten. De aanduiding spreiding voor een verzameling, waarvan de elementen volgens een bepaald procédé achtereenvolgens zijn voort te brengen, is minder kenmerkend. Zij werd door Brouwer eerst later ingevoerd⁵⁾, toen hij enige in de klassieke wiskunde gebruikte woorden ging vermijden, omdat deze suggereerden, dat een verzameling het geheel van haar elementen was.

Daarmede zijn wij gekomen tot een volgend punt, dat onze aandacht moet hebben. Men kan natuurlijk met betrekking tot de meetkundige terminologie een groot aantal wensen koesteren, maar bestaat ook de mogelijkheid daaraan te voldoen? Welke woorden en uitdrukkingswijzen zijn voorhanden en hoe zijn deze te benutten? Het is duidelijk, dat het stilstaan bij deze en dergelijke vragen ons tenslotte brengt bij de verhouding van vaktaal en omgangstaal.

Wij beginnen met het veel voorkomende geval te bezien, dat van een zeker object een speciaal type zo belangrijk blijkt, dat het een eigen benaming dient te bezitten. Theoretisch heeft men dan evenveel vrijheid bij de keuze daarvan als in het algemene geval, doch praktisch zal men er steeds de voorkeur aan geven de band met de theorie als geheel te bewaren en deswege de naam, die het object onafhankelijk van de verbijzondering draagt van een nadere aanduiding voorzien, hetgeen nog weer op verschillende wijzen kan geschieden.

Wanneer men spreekt van gelijkbenige driehoeken, omwentelingsoppervlakken, conforme afbeeldingen, barycentrische coördinaten en zo meer, wordt door de toevoeging aan de algemene naam de eigenschap, waardoor het speciale type gekarakteriseerd is, tot uitdrukking gebracht. Na hetgeen wij in het voorgaande bespraken is het overbodig dieper in te gaan op deze manier van doen, die ook dikwijls gevolgd wordt, wanneer men te maken heeft met een object, dat zich niet door een bijzondere eigenschap onderscheidt, doch dat een bijzondere plaats in een groter geheel inneemt. Men denke aan het osculatievlak en het rectificerende vlak in een punt van een ruimtekromme.

Er is nog een andere veel gevolgde methode om door het aanvullen van de naam van een object te kennen te geven, dat men een speciaal

type daarvan op het oog heeft of zich dit in een speciale functie denkt. Deze bestaat hierin, dat de een of andere persoon vernoemd wordt. Talloze stellingen heten naar een mathematicus en hetzelfde geldt voor allerlei ruimten, meetkunden, krommen, tensoren en wat niet meer. In sommige gevallen zal een toevoeging, die aanvankelijk slechts bedoelde naar een bepaalde publicatie of een bepaalde voordracht te verwijzen langzamerhand in de benaming zijn opgenomen. In andere gevallen is het object bewust naar iemand genoemd, omdat dit door hem werd geïntroduceerd of in kiem in zijn werk voorkomt. Naast de wens de historie te laten spreken is ook de behoefte uiting te geven aan de bewondering voor de arbeid van een bepaalde persoon motief voor de keuze van deze wijze van aanduiden.

De vraag of een object daardoor ook enigermate gekenmerkt wordt, moet in het algemeen ontkennend beantwoord worden. Van een wiskundige van normaal formaat is gewoonlijk niet in brede kring bekend op welk terrein hij zich beweegt of bewoog. En bij de groten onder de mathematici zegt vernoemen niet voldoende, omdat zij zich gewoonlijk op meer dan één gebied hebben onderscheiden. Zo heeft meetkunde van Riemann in de differentiaalmeetkunde een veel ruimere betekenis dan in de niet-euclidische meetkunde. Zo zal men niet terstond begrijpen, wat Busemann en Kelly bedoelen⁶⁾, als zij van de meetkunde van Hilbert spreken. En zo treft men in de literatuur definities van de meetkunde van Minkowski aan, die elkaar niet dekken.

In vroegere tijden kwam het ook voor, dat men zijn waardering niet uitsprak voor een uitvinder, maar voor diens vondst. De verdeling van een lijnstuk in uiterste en middelste reden werd als „gulden snede” gekarakteriseerd; een differentiaalmeetkundige stelling van Gauss met „theorema egregium” getypeerd en een figuur samenhangend met de stelling van Pascal bij de kegelsneden „hexagramma mysticum” betiteld. Tegenwoordig beperkt men zich tot kwalificaties als hoofdstelling, basisstelling en hulpstelling, waarbij dus geen emotionele factor in het spel is.

Tegenover het ontegenzeggelijke voordeel van de beschreven wijzen van benamen van specialisaties staat het nadeel van een zekere omslachtigheid, dat zich vooral laat gevoelen, wanneer het object zeer dikwijls ter sprake komt. In een dergelijke situatie gaat men er menigmaal toe over de aanduiding af te korten. Zo spreekt Schouten in één zijner laatste publicaties van de VN-method en de GC-method, waarmede dan opvolgend de valence-number-method en de generalized-Cartan-method zijn bedoeld. Dank zij de gunstige beginletters der drie

woorden kon Heyting in zijn „Intuitionism” een infinitely proceeding sequence aanduiden met ips, dus met drie aan elkaar geschreven en niet door punten gescheiden letters. Het is hier moeilijk te zeggen of men nog van een afkorting, dan wel van een nieuw — tot op zekere hoogte onafhankelijk — woord moet spreken.

Een even ander element is aanwezig in een wijze van doen, welke o. a. onlangs door Alexandroff werd gevolgd. Deze russische wiskundige noemde in een door hem te Wenen gehouden voordracht de „Cantorsche Mannigfaltigkeiten” eenvoudigheidshalve „Kontinua (U)”, hetgeen blijkens de kontekst in het résumé van zijn betoog⁷⁾, beschouwd kan worden als een afkorting van „continua van Urysohn”. Omdat de Kontinua (U) niet in alle opzichten voldoen aan de aanschouwelijke eisen, terwille waarvan zij werden ingevoerd, gaat Alexandroff er toe over het begrip „Cantorsche Mannigfaltigkeiten” te verscherpen. Zo komt hij tot de definitie van een nieuw begrip, dat hij met „Kontinua (V)” betiteld. Het is vrijwel zeker, dat de letter V hier niet gekozen werd, omdat zij de eerste letter van Verschärfung is, doch omdat zij in het alfabet op de U volgt. De V, en daarmee a posteriori ook de U, heeft het karakter van een aan het begrip toegevoegd symbool, dat in de benaming er van werd opgenomen.

Wij merken nog op, dat men dikwijls dezelfde merkwaardigheid aantreft, wanneer twee exemplaren van eenzelfde type object moeten worden onderscheiden. De twee stelsels rechten op een eenbladige hyperboloïde of de twee stelsels vlakken op de kwadratische variëteit van Felix Klein in de vijfdimensionale ruimte heten dan bijvoorbeeld het a-stelsel en het b-stelsel. Men kan hier even goed van het rode en het witte stelsel spreken en doet dit in het eerste geval ook vaak, omdat in de draadmodellen van de hyperboloïde gewoonlijk de rechten van de beide stelsels door draden van verschillende kleuren worden voorgesteld.

Intussen hebben wij thans lang genoeg stil gestaan bij de specialisaties en gaan wij ons verder weer bezig houden met het probleem van het toekennen van namen in het algemeen. Wij beginnen dan met te herinneren aan het niet tot het terrein der wiskunde beperkte verschijnsel, dat soms ongeveer gelijktijdig op verschillende plaatsen dezelfde ontdekking wordt gedaan of dezelfde theorie wordt opgebouwd; blijkbaar omdat de tijd er rijp voor is. Indien een aantal onderzoekers daarbij overgaan tot het invoeren van hetzelfde of nagenoeg hetzelfde begrip of object, is het geen uitzondering, dat ieder hunner daarvoor weer een andere benaming kiest en dat een zekere spraakverwarring

ontstaat. Zo deed het systeem met dubbele compositie, dat wij in het voorgaande hebben aangeduid met het engelse woord „lattice”, in Frankrijk zijn intrede als „structure” en in Duitsland als „Verband” en kan men deswege in Nederland zowel van „tralie”, als van „structuur” horen spreken. Wij hebben hier een nieuw voorbeeld van hetgeen wij reeds eerder vaststelden, namelijk, dat soms voor een object twee of meer benamingen passend geacht worden en wij willen er thans op wijzen, dat er zich daaronder kunnen bevinden, die toch niet in aanmerking komen en wel omdat zij reeds aan een andersoortig object uit dezelfde theorie zijn toegevoegd.

Bij de algebraïsche vlakke krommen heeft men twee karakteristieke getallen, welke graad en klasse genoemd worden. In de driedimensionale ruimte bezitten de algebraïsche oppervlakken naast de analoga van dit tweetal nog een derde karakteristiek getal, waarvoor dus de namen graad en klasse niet meer beschikbaar zijn en dat met rang wordt aangeduid. Begeven wij ons naar een ruimte met een hogere dimensie, dan hebben de algebraïsche oppervlakken vier karakteristieke getallen en wordt aan graad, klasse en rang nog type toegevoegd. Zo raakt bij het ingewikkelder worden der figuren de voorraad der beschikbare woorden uitgeput, te meer, omdat samenhangend met de vermelde getallen andere geïntroduceerd worden, zoals het geslacht van een vlakke algebraïsche kromme.

Essentieel is in deze en dergelijke gevallen, dat men volkomen vrij is in de wijze, waarop men de ter beschikking staande benamingen wil distribueren. Hierdoor is het zonder meer niet bekend, welk van de karakteristieke getallen van een oppervlak bedoeld wordt, wanneer men van type of rang spreekt en hebben namen als deze nauwelijks meer betekenis dan de letters, die in de formules de door hen aangeduide getallen voorstellen. Van de woorden graad en klasse kan men misschien zeggen, dat zij in de loop der historie meer inhoud hebben verkregen dan zij oorspronkelijk bezaten. Wanneer men echter let op het gebruik er van bij de stralencongruenties, ziet men, dat het zo juist opgemerkte veelszins ook op dit tweetal van toepassing blijft.

Tengevolge van het bestaan van een situatie als getekend zou het even zinvol geweest zijn, wanneer men de karakteristieke getallen niet door het geven van namen, doch door het toekennen van een rangnummer had onderscheiden. Men had dan tevens niet lang behoeven te denken over de letters, waardoor men ze zou voorstellen, doch had zich daarvoor kunnen bedienen van één enkele letter, welke men dan had moeten voorzien van een index, die het rangnummer aangaf. Toch

is het zeer wel verklaarbaar, dat men tot een dergelijke op nummering berustende wijze van aanduiden hier niet is overgegaan. Immers is daar tegen in te brengen, dat het rangnummer dan uitsluitend bepaald wordt door de volgorde, waarin de getallen hun intrede doen en overigens zelf geen wiskundige betekenis bezit. Hoewel in het geheel niet storend, omdat het slechts over twee objecten gaat, is dit laatste bezwaar ook aanwezig bij een voorbeeld van toepassen der onderhavige methode, dat wij eerder ontmoetten, te weten de elementen van de eerste en de tweede soort uit Barrau's Analytische Meetkunde.

Het komt echter vele malen voor, dat men een verzameling van objecten of begrippen heeft, waarvoor als het ware met de definitie ook een rangschikking is gegeven en in deze gevallen is het aangewezen hiervan gebruik te maken bij het vaststellen van benamingen. Bij de algebraïsche vlakke krommen, die zelf al terstond worden verdeeld in krommen van de tweede graad, krommen van de derde graad, enzovoort, is aan elk gewoon punt een getal toegevoegd, dat, kort gezegd, aangeeft in welke mate de kromme aldaar van een rechte lijn verschilt. In een punt van een ruimtekromme heeft men naast dit getal, dat „kromming” genoemd wordt, nog een tweede „torsie” geheten, dat, ook weer kort gezegd, aangeeft in welke mate de kromme ter plaatse van een vlakke kromme afwijkt. Beschouwen wij nu een kromme in een vierdimensionale ruimte, dan is het verder van belang te weten in welke mate deze in een bepaald punt verschilt van een kromme in een driedimensionale ruimte en zo komt er naast kromming en torsie een derde getal. Het is duidelijk, dat men in deze richting onbeperkt kan voortgaan en dat het wel een grote virtuositeit van geest zou vereisen telkens weer een benaming voor het nieuw toegevoegde getal te vinden. Gelukkig ligt hier een nummering der getallen voor het grijpen en zo kan men spreken van de eerste kromming in een punt, waaronder dan wordt verstaan het getal, dat oorspronkelijk alleen kromming heette; van de tweede kromming in een punt, die dus met de torsie correspondeert, en vervolgens, van de derde kromming, de vierde kromming enzovoort.

Vrijwel hetzelfde is op te merken met betrekking tot de enkelvoudige punten van een algebraïsche vlakke kromme, waarin de raaklijn meer dan twee samenvallende punten met de kromme gemeen heeft. Hier treft men aan het buigpunt of buigpunt van de eerste orde, waarin de raaklijn driepuntig raakt, het ondulatiepunt of buigpunt van de tweede orde, waarin de aanraking vierpuntig is en vervolgens de buigpunten van hoger orde dan twee, die geen afzonderlijke naam ontvingen en

waarin het aantal punten, dat de raaklijn met de kromme gemeen heeft, steeds twee groter is dan de orde. Niet ontaarde krommen van een gegeven graad kunnen slechts buigpunten bezitten van een orde, welke kleiner is dan de met één verminderde waarde van hun graad. Komen buigpunten van de hoogst mogelijke orde voor, dan noemt men deze „hyperosculatiepunten”. De buigpunten van een kubische kromme en eventuele ondulatiepunten van een vierdegraads kromme hebben dus tevens recht op de naam hyperosculatiepunt.

Door de gang van het betoog kwam bij het bespreken van de beide laatste voorbeelden het accent te liggen op het gebruik maken van nummers. Het is echter duidelijk, dat de benamingen in deze gevallen niet alleen daarop berusten, doch tevens op het reeds aanwezig zijn van de termen kromming en buigpunt. Zij vormen dus geen uitzondering op de vrijwel algemeen geldende regel, die tot dusver nog niet uitdrukkelijk werd uitgesproken, namelijk, dat de woorden en uitdrukkingen, die bij de opbouw der wiskunde worden gebezigd direct of indirect aan de omgangstaal ontleend zijn.

Wij maken over dit verband tussen vaktaal en omgangstaal een paar opmerkingen en wij wijzen er eerst op, dat de grenzen van hetgeen hier onder omgangstaal is te verstaan, zó ruim genomen moeten worden, dat ook uit het grieks en latijn afkomstige woorden, waarvan men zich in het dagelijks leven niet bedient, er binnen vallen. Dat de elementen van een „lattice” — naar wij mededeelden — door sommigen somata genoemd worden, beschouwen wij dus uit een oogpunt van naamgeving niet als een bijzonderheid. Wel is het goed even vast te stellen, dat men hier met een wezenlijke uitbreiding van het vocabularium te maken heeft, omdat gebruiken van de benaming „lichaam” in dit geval verwarring zou stichten, daar deze reeds voor een op een „lattice” gelijkend systeem werd gereserveerd. Iets soortgelijks is te constateren met betrekking tot het naast elkaar bezigen van de woorden axioma en postulaat in niet gelijke betekenissen, zoals dat lange tijd aansluitend bij de Elementen van Euclides plaats vond en thans, naar wij zagen, ook weer door Heyting geschiedde. Overigens bewerkt het opnemen van woorden ontleend aan of gevormd met behulp van de klassieke talen geen belangrijke vergroting van de mogelijkheden zich uit te drukken. Denken wij even speciaal aan een nederlandse tekst, dan worden daarin wel talloze internationaal gangbare woorden als isometrisch, umbilicaalpunt, homoloog en pseudosferisch gebezigd, doch deze zijn bijna nooit naast, maar gewoonlijk alleen in de plaats van hun reeds aanwezige of voor iemand met de kwaliteiten van

Simon Stevin eenvoudig uit te vinden nederlandse equivalent te gebruiken.

Het feit, dat dus de omgangstaal in een ruimere zin des woords het fonds is, waaruit de wiskundige put, heeft tot consequentie — dit is onze volgende opmerking —, dat er woorden zijn, die behalve hun veelal niet scherpomlijnde dagelijkse, nog een nauwkeurig omschreven vaktechnische betekenis bezitten. In het voorgaande hebben wij ons steeds de situatie zo gedacht, dat aan een nieuw of nader gedefinieerd begrip of object een naam moest worden gegeven en als dan gezegd werd, dat onder allerlei invloeden en met uiteenlopende motieven een bepaalde keuze werd gedaan, hield dit in, dat op de een of andere wijze rekening was gehouden met de betekenis, die aan de woorden in het leven van alle dag wordt toegekend. Er doet zich echter ook een andere gang van zaken voor, met name in verband met de grondslagen en wel, dat men uitgaat van een bepaald woord en na zorgvuldige analyse van de betekenis, die daaraan in het gewone spraakgebruik wordt verbonden, komt tot de definitie van een meetkundig begrip, dat passend met het onderhavige woord kan worden aangeduid. Het hiermede gegeven probleem van de begripsvorming in de wiskunde is o. a. uitvoerig besproken door Koksma in zijn interfacultair college⁸⁾ over „De Taal der Wiskunde”. Wij lichten het geschetste verloop toe door weer te geven de verantwoording die Blumenthal in zijn „Theory and Applications of Distance Geometry” aflegt over het gebruik van de term „ruimte”.

Blumenthal begint dan met te constateren, dat men intuïtief in een ruimte meer ziet dan alleen een verzameling van elementen. Men stelt zich immers voor, dat in een ruimte objecten een plaats kunnen verkrijgen en zich daarna dicht bij of ver van andere reeds aanwezige objecten zullen bevinden. Bovendien suggereert hetgeen wij door onmiddellijke aanschouwing onder een rechte lijn verstaan, dat elke ruimte, die haar naam met recht draagt, een soortgelijke continuïteit van structuur zal vertonen. Aan een abstracte verzameling kan dus eerst zonder geweld te doen aan de intrinsieke betekenis van dit woord de naam ruimte worden geschonken, indien daaraan extra eigenschappen zijn toegekend, die een zekere gelijkenis vertonen met de continuïteits- en naburigheds-eigenschappen, welke de ruimte onzer voorstelling schijnt te bezitten. Deze toegevoegde kenmerken heten dan de topologie, die de abstracte verzameling tot een abstracte ruimte maakt. In het voorbijgaan zij hierbij aangetekend, dat gewoonlijk en trouwens ook door Blumenthal in een eerder geschrift over hetzelfde onderwerp, ge-

zegd wordt, dat een verzameling, doordat voor haar elementen relaties of operaties gedefinieerd worden, een structuur verkrijgt.

Nadat Blumenthal nu vervolgens drie verschillende methoden, welke werden ontworpen om een topologie in te voeren, heeft vermeld, komt hij in een volgende paragraaf tot de conclusie, dat geen daarvan enig rechtstreeks verband schijnt te hebben met het begrip naburigheid en dat nieuwe eisen zouden moeten worden gesteld om de mogelijkheid tot het verrichten van metingen in deze ruimten te openen. Aangezien evenwel de aanwezigheid van een maatbepaling op het door Blumenthal ingenomen standpunt voor een ruimte een *conditio sine qua non* is, gaat hij er toe over, terstond in een abstracte verzameling het begrip afstand als grondbegrip te introduceren om daarmee deze verzameling tot een afstandsruimte te maken. Zo doen los van elkander hun intrede de topologische of omgevingsruimte en de afstandsruimte en dat niet als speciale gevallen van een exact gedefinieerd algemeen begrip ruimte, doch als resultaten van verschillende methoden om uitgaande van het intuïtieve een meetkundig ruimtebegrip te definiëren. Wij ontmoeten hier een kwalitatieve naast een meer kwantitatieve benadering, waartussen overigens wel enig verband is te leggen.

Naar aanleiding van het aldus geresumeerde betoog van Blumenthal is nog op te merken, dat ongetwijfeld het begrip omgeving fundamenteel van aard is dan het begrip afstand. Bij de meermalen beschreven worsteling om een zodanige definitie van het begrip kromme lijn te geven, dat alle hiervoor in het dagelijks leven kenmerkend geachte eigenschappen inderdaad aanwezig zijn, was nimmer een overweging, dat een boog een zekere lengte moest bezitten. De omstandigheid, dat de oudste vorm van meetkunde de euclidische is, doet echter uitkomen, dat mede dank zij allerlei mechanische en physische ervaringen het begrip afstand vele eeuwen eerder dan het begrip omgeving een belangrijke plaats in de beschouwingen heeft bezet. In dezelfde richting wijst de benaming meetkunde, die tegenwoordig voor een wel zeer veel uitgebreider veld van onderzoek wordt gebezigd dan oorspronkelijk. De daaruit voortvloeiende behoefte om uitdrukkelijk te vermelden, wanneer in een meetkundige theorie het begrip afstand een rol speelt, deed de naam „afstandsmetkunde” en voor een onderdeel daarvan de zeer merkwaardige naam „metrische meetkunde” ontstaan.

Wij richten onze aandacht thans weer op het begrip ruimte en stellen vast, dat tot dusver nergens van een daaraan inhaerent aantal afmetingen werd gerept. Nu kan men veilig zeggen, dat, als een wiskundige het zonder verdere aanduiding over een ruimte heeft, hij daar-

mede in de regel een driedimensionale zal bedoelen. Een deel van een Inleiding in de Analytische Meetkunde, dat als ondertitel „De Ruimte” draagt, bevat misschien een hoofdstuk over de meerdimensionale meetkunde, maar stelt geen over de vlakke. Het is de vraag of dit daaraan moet worden toegeschreven, dat men intuïtief met ruimte de aanwezigheid van juist drie afmetingen verbindt. Er bestaan immers gezegden als „ruimte maken op een collegebord” en „met gelijke tussenruimten punten op een lijn zetten”. Hoe dit zij, het aantal aan een ruimte toegekende dimensies is toch steeds eindig en dus wordt het woord ruimte in een algemenere zin gebezigd dan in het gewone spraakgebruik, wanneer men de oneindig-dimensionale generalisatie van de euclidische ruimte de naam Hilbert-ruimte geeft. En niet alleen bij deze ruimte is dit het geval. In de Hilbert-ruimte is een eigenlijke metriek gedefinieerd en derhalve vindt eenzelfde generaliseren plaats bij het spreken van afstandsruimte en metrische ruimte. Men kan hier verder — om niet meer te noemen — aan toevoegen de arithmetische ruimten, waarbij de coördinaten der punten gekozen worden uit andere lichamen dan dat der reële getallen. Om een indruk te geven van de merkwaardige consequenties, die een dergelijk vasthouden van een bestaande benaming bij het overgaan naar algemenere figuren somtijds medebrengt, wijzen wij op het gebruik van het woord „rechte” in de complexe, de quaternionen- en de octaven-meetkunde. Dit is volkomen in overeenstemming met het gebruik er van in de reële meetkunde en dus volledig verantwoord; maar het bewerkt, dat een naam, die als het ware automatisch met ééndimensionaliteit wordt verbonden, nu wordt gedragen door een puntverzameling met opvolgend twee, vier en acht dimensies.

Dames en Heren, van de woorden en uitdrukkingen, waarover wij spraken, hebben wij steeds verondersteld, dat zij aan nauwkeurig gedefinieerde of aansluitend bij hun algemeen gangbare betekenis alsnog te definiëren meetkundige begrippen of objecten als benamingen werden toegevoegd. Een wiskundige heeft daaraan echter niet voldoende en moet zich bij de opbouw van zijn wetenschap noodzakelijk, ook bedienen van termen, die een exacte omschrijving missen. Ongetwijfeld zal hij daarbij een uiterste soberheid betrachten, maar zelfs wanneer hij om allerlei redenen en vooral ook om het gevaar van dubbelzinnigheid te vermijden zich niet uitdrukt met behulp van de taal, doch door middel van een begripsschrift, kan hij deze ongedefinieerde termen niet geheel ontberen; hij moet immers beginnen eerst zijn tekens te verklaren.

Natuurlijk heeft men met deze omstandigheid te rekenen bij het bepalen van de waarde, die aan de meetkundige theorieën toekomt. Dat de arbeid van een mathematicus zinvol is, wordt er echter niet door weersproken, want dit berust, al zal zulks niet ieder steeds bewust voor de geest staan en al zullen sommigen het misschien niet willen erkennen, alleen daarop, dat hij bij het uitoefenen van zijn taak bezig is met het vervullen van een scheppingsopdracht. De taal, waarvan hij zich bedient, wanneer hij zelf of gezamenlijk met anderen werkzaam is, werd hem geschonken als een daartoe bruikbaar instrument, hetgeen hem met recht doet veronderstellen, dat zekere termen door ervaring en opvoeding voor ieder een gelijke inhoud bezitten.

Intussen legt de invoering van de meetkundige terminologie aan het algemene woordgebruik zekere beperkingen op. Is eenmaal aan een woord een speciale meetkundige betekenis verbonden, dan kan men dit bezwaarlijk in hetzelfde verband nog met een andere bedoeling bezigen. Een enkele maal is dit wel eens hinderlijk. Men wordt hieraan herinnerd, als Blumenthal ergens in het laatste hoofdstuk van zijn eerder geciteerde werk over gerangschikte paren elementen van een „lattice” spreekt. Een „lattice” was immers een partieel gerangschikte verzameling en daarom acht Blumenthal het gewenst er in een noot uitdrukkelijk op te attenderen, dat hij bij de beschouwde elementenparen niet de binnen het „lattice” aanwezige relaties op het oog heeft, doch het woord „gerangschikt” hier in een metamathematische zin gebruikt.

Treden dergelijke ongedefinieerde, in metamathematische zin gebezigde termen in een definitie op, dan kan het gevolg daarvan zijn, dat aan het gedefinieerde begrip niet zonder meer een plaats in de meetkundige beschouwingen is te geven. Zo is men — wij wezen er op — eerst in staat met het begrip ruimte te werken, nadat de relaties en (of) operaties, die de topologie of structuur tot stand brengen, geconcretiseerd zijn. Verder kan in dit verband genoemd worden de term „meetkundig object”. Deze werd in 1930 door Schouten en Van Kampen gebezigd en nadien verscheen meer dan één publicatie, welke beoogde het daardoor aangeduide begrip op bevredigende wijze exact te definiëren. Natuurlijk is het in dit en in dergelijke gevallen zó, dat men, nadat men eenmaal een definitie heeft uitgesproken, daaraan verder gebonden blijft. De vraag is dan geworden of het aldus gedefinieerde begrip de benaming, waarvan men uitging, terecht draagt.

Een woord is niet identiek met het begrip of het object, dat men er mede aanduidt. Wanneer men spreekt van tweedegraads kromme

naast kegelsnede, wordt eenzelfde figuur de ene keer van de statische en de andere keer van de dynamische kant benaderd, zoals ook geschiedt, wanneer van bepaalde parameters zowel gezegd wordt, dat zij een lineaire verplaatsing, als dat zij een lineaire samenhang bepalen. Daarnaast komt het voor, dat eenzelfde woord binnen de meetkunde meer dan één betekenis heeft. Wij ontmoetten woorden als graad en klasse en vermelden, om nog een voorbeeld van andere aard te noemen, het verschillend gebruik van het woord „cykel” in de niet-euclidische meetkunde en in de meetkunde van Laguerre. Eindelijk stelden wij vast, dat bij een woord in het algemeen twee betekenissen zijn te onderscheiden, een oorspronkelijke dagelijkse en een vaktechnische. Daar deze elkaar niet geheel dekken, verdient het nu eens aanbeveling een aanschouwelijke uitdrukkingwijze te verkiezen, dan weer de voorkeur deze te vermijden. Zo moet men enerzijds rekenen met menselijke beperktheid en onvolkomenheid, maar bezit men anderzijds in de taal een zo rijke gave, dat aan de terminologie in vele meetkundige geschriften ook een persoonlijke kleur is op te merken.

Ik heb gezegd.

AANTEKENINGEN

- ¹⁾ Woord en Gedachte. Ook: Euclides 7 (1930), 4.
- ²⁾ G. Bol, Vlakke Laguerre-meetkunde (1928), 3.
- ³⁾ Euclides 9 (1932/33), 190–193.
- ⁴⁾ Indagationes Mathematicae *II* (1949), 89–90.
- ⁵⁾ A. Heyting, Intuitionism (1956), 37.
- ⁶⁾ Projective Geometry and Projective Metrics (1953), 159–160.
- ⁷⁾ Nachr. Oest. Math. Ges. Beilage zu Int. Math. Nachr. Nr 47/48 (1957), 29.
- ⁸⁾ Uitgave Vrije Universiteit 1948 (1950).



BIBLIOTHEEK VRIJE UNIVERSITEIT

3 0000 00157 1797



1676

